



Multi renforcement du bois lamellé collé - étude théorique et expérimentale

Viet Anh Nguyen Trung

► To cite this version:

Viet Anh Nguyen Trung. Multi renforcement du bois lamellé collé - étude théorique et expérimentale. Matériaux. Ecole des Ponts ParisTech, 2010. Français. NNT : 2010ENPC1012 . pastel-00627387

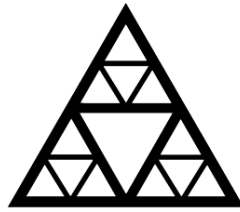
HAL Id: pastel-00627387

<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00627387>

Submitted on 28 Sep 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École des Ponts

ParisTech

THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR

DE

L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Spécialité : Structures et Matériaux

présentée par

NGUYEN TRUNG Viet Anh

Sujet de thèse :

MULTI RENFORCEMENT DU BOIS LAMELLÉ COLLÉ

ÉTUDE THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTALE

Soutenue le 17 septembre 2010

devant le jury composé de :

ALBERTO DIAZ DIAZ
CHRISTOPHE PETIT
JEAN LUC COUREAU
JEAN FRANÇOIS JULLIEN
JEAN FRANÇOIS CARON
ROBERT LE ROY

Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Co-directeur
Directeur

Remerciement

En premier lieu, je suis infiniment reconnaissant mon directeur de thèse, Monsieur Robert LE ROY, qui m'a encadré avec pleine d'enthousiasme et de disponibilité. Sans lui, cette rédaction de thèse ne serait jamais achevée. Merci Robert pour ton optimisme et surtout tes encouragements qu'ils m'ont prodigués tout au long de la thèse.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Jean-François CARON, mon co-directeur de thèse, avec qui j'ai eu beaucoup de plaisir à travailler. Je le remercie pour les conseils scientifiques et techniques qu'il m'a apportés pour mener à bien ces travaux.

Mes remerciements vont également aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer mon travail de thèse. Je remercie Monsieur Jean-François Jullien d'avoir accepté de présider le jury. Je remercie Monsieur Alberto DIAZ-DIAZ, Monsieur Christophe PETIT d'avoir accepté d'être rapporteurs, ainsi que Monsieur Jean-Luc Coureau – examinateur de ce manuscrit. Leurs remarques et suggestions lors de la lecture de mon rapport m'ont permis d'apporter des améliorations à la qualité de ce dernier.

Je voudrais remercier vivement Monsieur Karam SAB qui m'a apporté un soutien scientifique important pour la thèse.

J'adresse mes remerciements à toute l'équipe du labo pour son accueil chaleureux et l'ambiance agréable du travail. Je ne saurais oublier leur aide, leur amitié durant ces années. Un grand merci également à l'équipe Administratifs et Techniques qui m'ont volontairement aidé dans la réalisation de travaux expérimentaux.

Enfin, ce travail ne serait pas vu le jour sans soutien de ma famille et je remercie tout particulièrement mes parents et ma sœur qui m'ont constamment soutenu tout au long de cette thèse. Merci Thu, mon amour, pour ta patience.

Résumé

Cette recherche présente des résultats théoriques et expérimentaux sur le renforcement de poutres en lamellé collé par composite à base de fibres, l'application recherchée étant la proposition de structures de tabliers de ponts de haute résistance. Le concept retenu est une structure multi renforcée par la disposition de lamelles de composites entre les lamelles en bois dans la zone de traction. On montre que ce type de renfort possède expérimentalement, à taux de renfort donnée, des propriétés plus élevées que celles obtenues par des méthodes courantes consistant au renforcement en face inférieure d'une seule couche de composite. On montre en particulier que la distribution statistique de la rupture en traction du bois est resserrée grâce à la présence du composite. Ainsi, un renfort de faible épaisseur, réparti convenablement entre les lamelles de bois, a un double effet, celui attendu de diminuer les contraintes dans les fibres de bois, mais aussi, celui de réduire la distribution statistique de résistance. La prise en compte des renforts dans les calculs revient donc à redéfinir une résistance caractéristique d'un bois homogène équivalent ayant les propriétés du bois renforcé. De plus, on montre qu'il existe des configurations telles que les fissures transverses dans les lamelles de bois engendrées par la contrainte normale de traction sont stoppées par les lamelles de renfort et qu'il est possible d'obtenir un schéma de rupture multi fissuré. Un critère de rupture par délaminage de l'interface bois-composite est proposé et déterminé expérimentalement à cette fin. Enfin, des expérimentations sur prototypes hybrides constituées d'un multi couches bois-carbone-béton ultraperformant, est présentée. Les résultats ont permis de valider la méthode proposée de répartition du renfort en couches réparties de faible épaisseur.

Abstract

This research provides theoretical and experimental results on strengthening glulam wood beams with fibre reinforced polymers. The projected applications deal with composite bridge deck structures. The selected design is composed of glulam beams reinforced in tension by muli layers carbone fiber reinforced polymer (CFRP) plates inserted between wood lamellas. We show that this type of reinforcement, for a given ratio of CFRP, has a much better performance than that of the current method consisting in strengthening the lower surface of the beam by a single layer of composite. It is shown that the statistical distribution of tensile strength is narrowed by the presence of the composite. Thus, a reinforcement of thin CFRP plates, properly distributed between the lamellas, has a dual effect, the first, as expected, is the fact that CFRP reduces the stresses in wood, the second positive effect is a reduction of the statistical extent of tensile strength, which results in a increase of the characteristic tensile strength of wood. Taking into account reinforcements in the calculations can be simply carried out by redefining a characteristic strength of wood with the equivalent homogeneous properties of reinforced material. Furthermore, we show that there are features such as transverse cracks in the wooden lamellas caused by the tensional stresses are stopped by the reinforcement so much so that it is possible to obtain a pattern of multi-cracked fracture. A failure criterion for delamination of wood - composite interface is proposed and experimentally determined for this purpose. Finally, experiments on hybrid beams prototypes consisting in glulam – very high performance concrete - CFRP, is presented. The results validated the proposed method of distribution of the composite reinforcement

Table des matières

CHAPITRE 1. GENERALITE SUR LES PONTS MIXTES EN BOIS.....	3
1.1. Le bois : un matériau renouvelable	4
1.1.1. Essences et microstructure du bois	6
1.1.2. Propriétés mécaniques et classification	8
1.1.3. Bois lamellé collé (BLC)	11
1.2. Typologie des ponts en bois	15
1.2.1. Ponts couverts.....	15
1.2.2. Ponts à poutres triangulaires	16
1.2.3. Ponts à béquilles	17
1.2.4. Ponts en arc.....	17
1.2.5. Ponts suspendus ou haubanés.....	18
1.2.6. Ponts mixtes bois - béton.....	18
1.3. Les matériaux innovants	19
1.3.1. Le béton fibré à ultra haute performance.....	19
1.3.2. Le polymère renforcé par des fibres (FRP).....	22
Les matériaux des fibres.....	22
La matrice.....	22
1.4. Association entre le bois et d'autres matériaux	23
1.4.1. Connexion bois – béton	23
1.4.2. Connexion bois - composite	28
1.5. Etude exploratoire de solutions structurelles alternatives	28
1.5.1. Ponts-dalles sandwichs	29
Dalle sandwich à âme alvéolaire en bois – Le nid d'abeilles	29
Dalles sandwichs à âme pleine en bois – Le bois debout.....	34
1.5.2. Poutres sandwichs en bois	36
1.5.3. Conclusions sur les solutions structurelles à approfondir.....	38
1.6. Conclusion.....	38
CHAPITRE 2. ÉVALUATION DU RENFORCEMENT DE POUTRES EN BOIS PAR MATERIAUX COMPOSITES	39
2.1. Introduction	40
2.2. Revue de la littérature	40
Les renforcements de type (a)	41
Les renforcements de type (b)	42
Les renforcements de type (c)	43
Les renforcements de type (d)	43
Les renforcements de type (e)	43
Les renforcements de type (f).....	43
Les renforcements de type (g)	44
Les renforcements de type (h) :.....	45

2.3. Première analyse mécanique du renforcement.....	46
2.3.1. Analyse linéaire	46
2.3.2. Analyse bi-linéaire	48
Résolution pour une rupture en compression	50
Résolution pour une rupture en traction.....	50
Application du modèle pour prévoir la rupture du bois seul en flexion	50
2.4. Expérimentation	51
2.4.1. Dimensions des éprouvettes et propriétés des matériaux	52
2.4.2. Métrologie et procédure d'essai	52
2.4.3. Résultats des essais	53
Méthode d'exploitation des résultats	53
Modes de rupture des poutres – examen des courbes obtenues	54
Analyse plus détaillée des résultats	56
Comparaison des raideurs en flexion trois points	57
Charge maximale et Module de Rupture (MOR)	58
Contrainte maximale en traction dans le bois	59
L'épaisseur (hauteur) de bois plastifié et déformation maximale de la fibre extrême comprimée	60
2.5. Conclusion.....	61

CHAPITRE 3. MODELISATION D'UNE POUTRE FLECHIE MULTI-RENFORCEE

3.1. Les modèles multicouches.....	63
3.1.1. Les modèles existants	63
3.1.2. Approche multiparticulaire	65
3.1.3. Approximation des champs des contraintes et des déplacements.....	66
Champs de contraintes approchées du modèle $\mathcal{M}4-5n$	66
Champ de contraintes approchées du modèle $\mathcal{M}4-2n+1$ Plaque.....	68
3.1.4. Les équations du modèle et les conditions aux limites.....	69
Modèle $\mathcal{M}4-5n$	69
Modèle $\mathcal{M}4-2n+1P$	71
3.2. Modélisation des poutres multicouches en flexion	72
3.2.1. Description du problème	72
3.2.2. Problème de flexion par le modèle $\mathcal{M}4-2n+1$ Plaque	73
Récapitulatif des équations principales bidimensionnelles	73
Établissement du système d'équations.....	76
Conditions aux limites	77
Solution analytique	77
Conclusion	78
3.2.3. Résolution analytique avec le modèle $5n$ bidimensionnel.....	78
Récapitulatif des équations principales bidimensionnelles	79
Établissement du système des équations	81
Conditions aux limites	86
Résolution analytique.....	87
Récapitulatif des étapes de la résolution	88
Conclusion	89
3.3. Validation par un calcul éléments finis $M4$.....	89
3.4. Conclusion.....	93

CHAPITRE 4. IDENTIFICATION DE CRITERE DE RUPTURE D'INTERFACE DANS LE RENFORCEMENT MULTI-LAMELLE..... 94

4.1. Introduction	95
4.2. Modélisation de la fissure transverse et du délaminage	97
4.2.1. Modélisation des interfaces imparfaites - Délaminage.....	97
4.2.2. Sous-structuration du stratifié pour modéliser le délaminage	98
4.2.3. Modélisation des fissures transverses	99
4.2.4. Modélisation de la multi fissuration	99
4.3. Identification du critère de rupture d'interface d'un 3-couches bois-carbone	100
4.3.1. Le problème mécanique considéré	101
Analyse avec le M4-2n+1	101
Analyse avec le M4-5n	102
4.3.2. Expérimentation.....	102
4.3.3. Analyse des résultats expérimentaux avec le modèle M4-2n+1.....	105
4.4. Conclusion.....	110

CHAPITRE 5. VERIFICATION EXPERIMENTALE DU MULTI-RENFORCEMENT112

5.1. Introduction	113
5.2. Programme expérimental	113
5.3. Propriétés des matériaux	113
5.3.1. Béton fibré ultra performant (BFUP).....	113
5.3.2. Bois lamellé collé.....	114
5.3.3. Composite de fibres de carbone (CFRP).....	114
5.4. Fabrication des corps d'épreuve.....	115
5.4.1. Collage de lamelles de bois et de carbone.....	115
5.4.2. Collage du béton sur le bois	117
5.4.3. Renforcement au cisaillement des poutres	118
5.5. Déroulement des essais	119
5.5.1. Montage et instrumentation.....	119
5.5.2. Programme de chargement	120
5.6. Modélisation des poutres par le modèle M4-5n.....	122
5.7. Résultats	124
5.7.1. Observation au cours des essais sur les corps d'épreuves.....	125
Poutre 1.1.....	125
Poutre 1.2.....	128
Poutre 1.3.....	130
Poutre 2.1.....	132
Poutre 2.2.....	134
Poutre 2.3.....	137
Poutre 2.4.....	139
Poutre 2.5.....	141
5.7.2. Analyse des résultats.....	143
Comportement élastique et jusqu'à la rupture	143

Déplacement relatif entre lamelles extrêmes.....	144
Evaluation des deux effets du renforcement :	145
5.8. Une simulation numérique.....	146
5.8.1. Grandeurs matérielles et critère de rupture.....	146
Description du modèle	146
Critère de rupture	147
5.8.2. Suivi de la rupture progressive et organisation du programme de simulation.....	147
5.8.3. Résultats.....	148
Poutre sans renfort (poutre de référence).....	148
Poutres renforcées.....	151
5.8.4. Conclusion sur le résultat de la simulation	154
5.9. Optimisation de la hauteur de renforcement d’une poutre hybride en bois	155
5.10. Conclusion	156

Liste des figures

Figure 1.1.	L'évolution de la superficie forestière en France (source IFN).....	4
Figure 1.2.	Évolution de la superficie forestière (peupleraies exclues, bosquets inclus) sur 20ans par interrégion (en milliers d'hectares). (Source IFN)	4
Figure 1.3.	Croissance forestière supérieure à la récolte en Europe [Stora Enso]	5
Figure 1.4.	Piégeage du carbone dans les produits à base de bois (d'après Building information foundation)	5
Figure 1.5.	Structure cellulaire du bois [Triboulot, TDI]	6
Figure 1.6.	De l'arbre au comportement anisotropie	7
Figure 1.7.	Comportement du bois sans défaut en traction et en compression dans la direction longitudinale des fibres [Triboulot, TDI]	9
Figure 1.8.	Retrait et déformation du bois au cours du séchage [Triboulot, TDI]	11
Figure 1.9.	Pont en treillis dans le canton de Graubunden (Suisse) construit en 1854 [Steurer, 2006].	12
Figure 1.10.	Comparaison de trois produits de même résistance en flexion : (a) – Bois massif C24. (b)- Bois lamellé collé classe GL32. (c) Lamibois [Alann, 2007]	12
Figure 1.11.	Différentes formes des ouvrages en bois lamellé collé [Can.Wood.Council]	13
Figure 1.12.	Schéma d'une manufacture du bois lamellé collé [Can.Wood.Council.2007]	14
Figure 1.13.	Enlèvement d'un défaut avant aboutage.....	14
Figure 1.14.	Pont de Lucerne	16
Figure 1.15.	Pont sur la Dore (1994) (BET Calvi)	16
Figure 1.16.	Pont de Vihantasalmi	17
Figure 1.17.	(Vihantasalmi) : Tablier mixte béton – bois lamellé collée	17
Figure 1.18.	Pont de Merle.....	17
Figure 1.19.	Passerelle de Pinot – Blagnac (31)	18
Figure 1.20.	Pont Marc Seguin, Tournon, reconstruit en 1989.....	18
Figure 1.21.	Multi fissuration du CEMTEC® en traction directe.....	20
Figure 1.22.	Barrière du péage du pont Millau (53 voussoirs – 2300 tonnes de BSI® 2005).....	20
Figure 1.23.	Passage sur l'A51.....	21
Figure 1.24.	Pont de Saint Pierre la Cour, Mayenne (2005 - Ductal® 2005)	21
Figure 1.25.	Développement du module en traction de fibres de carbone.....	22
Figure 1.26.	Deux exemples des connecteurs locaux.....	24
Figure 1.27.	Connexion par adhérence des surfaces	24
Figure 1.28.	Connexion en métal déployé [De Noray, 2005]	24
Figure 1.29.	Paramètres du modèle de l'EN 1995-1	25
Figure 1.30.	Eléments dalle réalisé par Pham. BFUP collé sur BLC	26
Figure 1.31.	Corps d'épreuve bois-BFUP en cours d'essai de fatigue en flexion [Pham, 2007]	27
Figure 1.32.	Figure essais push out réalisés par Blonski	27
Figure 1.33.	Courbe Force-Flèche – Essai de flexion 4 points des poutres mixtes [Pham, 2007] ...	27
Figure 1.34.	Pont Miyun - le premier pont en GFRP du monde, 1982, Pékin, China. Longueur 20.7m ; Largeur 9.2m. Dalle de type nid d'abeille en GFRP.....	29
Figure 1.35.	Principe de la dalle sandwich à âme alvéolaire.....	29
Figure 1.36.	Structure nida réalisé par Pham K.H	30
Figure 1.37.	Essais de flexion 3 point	30
Figure 1.38.	Flexion 3 points. Poutres sandwich BUHP 30mm- nid d'abeilles en bois 170mm – GFRP 3mm	31
Figure 1.39.	Glissement dans les joints de colle visible par le décollage du quadrillage	31
Figure 1.40.	Étude d'homogénéisation du matériau nid d'abeilles : (1)Choix du VER. (2)Modélisation en modèle de coque. (3)Détermination des constants du matériau homogénéisé.	31
Figure 1.41.	Carto graphique de déplacement U1 - Illustration d'un cas de chargement de cisaillement imposé sur le VER d'une structure nid d'abeilles.	32

Figure 1.42.	Module de cisaillement en fonction de l'épaisseur de la paroi	32
Figure 1.43.	Le rapport entre le module d'Young E_{11} et celui de cisaillement G_{13} est considéré constant (L : Longueur de la paroi).....	33
Figure 1.44.	Flèche en fonction du module de cisaillement G_{13} (h – épaisseur de l'âme)	34
Figure 1.45.	Schéma d'un sandwich en « bois debout ».....	34
Figure 1.46.	Convention de la direction matérielle du matériau bois debout. e_l , e_t et e_r sont respectivement les directions longitudinale, transversale et radiale du bois.	35
Figure 1.47.	Vue générale du tablier en phase d'essai.....	36
Figure 1.48.	Rupture de la première poutre BLC. Développement de la fissure de traction au niveau d'un nœud et décollement du CFRP. Vue d'un tronçon scié de la poutre.....	37
Figure 1.49.	Rupture initiale au niveau d'un joint d'aboutage de la seconde poutre en bois	37
Figure 1.50.	Rupture à la jonction entre dalles de BFUP par concentration de contrainte et ségrégation des fibres.	37
Figure 2.1.	Rupture en traction aux défauts du bois.....	40
Figure 2.2.	Quelques méthodes de renforcement par FRP en flexion de poutres en bois lamellé collé	41
Figure 2.3.	Pont mixte NR2C [Ben Mekki et al., 2007]	42
Figure 2.4.	Le Carboglulam® [CBTA, 2003].....	45
Figure 2.5.	Caractéristiques du bois (3), du bois lamellé collé (2) et du bois lamellé collé renforcé par FRP (1).	46
Figure 2.6.	Section renforcée	47
Figure 2.7.	Schéma de calcul non-linéaire.....	48
Figure 2.8.	Comportement bi linéarisé du bois en compression [Buchanan, 2000]	49
Figure 2.9.	Simulation de la rupture des poutres en bois seul de différentes essences. Section 100x50 (mm2). Portée 1600 mm.....	51
Figure 2.10.	Dispositif pour les essais en flexion 3 points.....	52
Figure 2.11.	Le plan de chargement / déchargement.....	53
Figure 2.12.	Comportement typique de bois en compression.....	54
Figure 2.13.	Poutre non renforcée. Rupture en traction.	54
Figure 2.14.	Poutre renforcée. Rupture en traction.	55
Figure 2.15.	Comportement en flexion pour les poutres non renforcées	56
Figure 2.16.	Comportement en flexion pour les poutres renforcées.....	56
Figure 2.17.	Comparaison des raideurs en flexion trois points.....	57
Figure 2.18.	Module de rupture et capacité maximale des poutres en flexion trois points	58
Figure 2.19.	Contrainte maximale en traction du bois au moment de rupture	59
Figure 2.20.	Épaisseur du bois plastifiée dans la section mi-travée.....	60
Figure 3.1.	Proposition du multi renforcement (ou multi lamage)	62
Figure 3.2.	Renforcement multi lamé	63
Figure 3.3.	Problème multicouche	66
Figure 3.4.	Poutre multi renforcée en flexion	72
Figure 3.5.	Notation de chargement d'un multicouche	78
Figure 3.6.	Schéma de calcul de l'essai en traction directe d'un assemblage 3 couches.....	89
Figure 3.7.	Schéma 1	90
Figure 3.8.	Effort membranaire généralisé N_{11i} dans les couches 1 et 2	90
Figure 3.9.	Contrainte de cisaillement de l'interface 1,2	91
Figure 3.10.	Configuration 2.....	91
Figure 3.11.	Effort membranaire généralisé N_{11i} dans les couches i, $i=\{1, 2 \text{ et } 3\}$	92
Figure 3.12.	Contrainte de cisaillement τ_{xz} de l'interface 1,2 et 2,3	92
Figure 4.1.	Schéma de la modélisation sous structurale : Le multicouche 2 et 3 relie avec celui 1 par les conditions de continuité en $x=x_d$	99
Figure 4.2.	Schéma de la modélisation d'une structure multi fissurée.....	100
Figure 4.3.	Configuration du problème, le multicouche est fixé à $x=L$, avec la symétrie en $x=0$..	101
Figure 4.4.	Éprouvettes d'essai en traction directe	103
Figure 4.5.	Installation d'un test – Mesure de déplacement	104
Figure 4.6.	Rupture mode II	104
Figure 4.7.	Différents maillages du calcul.	106

Figure 4.8. Profil de cisaillement dans la demi couche du bois: Empilement 3 couches carbone/bois en traction directe. ($h_w=28$, $h_c=0,5$. $E_w=13060$, $E_c=90000$, $G_w=600$, $G_c=5000$).[N][mm] ..	106
Figure 4.9. Résistance en cisaillement d'interface calculée à partir des résultats expérimentaux – Les courbes de regression de Weibull ont de même facteur de forme $\lambda=10$	108
Figure 4.10. Cisaillement critique en fonction de l'épaisseur des mailles de la couche bois.....	108
Figure 4.11. Valeur de la contrainte de cisaillement d'interface maximale en fonction de l'épaisseur des mailles de la couche bois. $K\tau=35$, $k = 3500/13060 \approx 0,3389$	110
Figure 5.1. Lamelles de carbone nettoyées avant encollage	115
Figure 5.2. Insertion manuelle des lamelles de carbone et fixation provisoire par des clous	116
Figure 5.3. Mise sous presse et pose d'une masse en fonte pour stabiliser l'ensemble	116
Figure 5.4. Rabotage des poutres après durcissement de la colle.....	117
Figure 5.5. Coulage du béton BFUP.....	118
Figure 5.6. Encollage du bois.....	118
Figure 5.7. Poutres collées en cours de séchage.....	118
Figure 5.8. Renforcement au cisaillement des extrémités des poutres	119
Figure 5.9. Disposition de l'instrumentation.....	120
Figure 5.10. Gauges ex-centrées et capteur LVDT de la mesure de déplacement relatif entre les lamelles extrêmes.	120
Figure 5.11. Chargement des poutres non renforcées	121
Figure 5.12. Chargement des poutres renforcées.....	121
Figure 5.13. Corps d'épreuve prêt à être testé	122
Figure 5.14. Schéma mécanique pour le calcul, avec $L=3$ m	122
Figure 5.15. Rupture de la lame inférieure à 75 kN	126
Figure 5.16. Ruine de la poutre et rupture du béton en traction	126
Figure 5.17. Courbe Force – Flèche de la poutre 1-1 (sans renfort)	127
Figure 5.18. Navier centré de la poutre P1.1 (sans renfort)	127
Figure 5.19. Navier ex-centré de la poutre P1.1 (sans renfort).....	127
Figure 5.20. Rupture en traction à 56 kN.....	128
Figure 5.21. Rupture en traction au niveau d'un second nœud puis cisaillement.....	128
Figure 5.22. Courbe Force – Flèche de la poutre 1-1 (sans renfort)	129
Figure 5.23. Navier centré de la poutre P1.2 (sans renfort)	129
Figure 5.24. Navier ex-centré de la poutre P1.2 (sans renfort).....	129
Figure 5.25. Rupture des lamelles du bois en traction.....	130
Figure 5.26. Courbe Force – Flèche de la poutre P-2.1 (renforcée)	131
Figure 5.27. Navier centré de la poutre P2.1 (sans renfort)	131
Figure 5.28. Navier excentré de la poutre P1.3 (renforcée)	131
Figure 5.29. Rupture de la lame inférieure et compression du béton	132
Figure 5.30. Ruine par compression du bois	132
Figure 5.31. Courbe Force – Flèche de la poutre P 2.1 (sans renfort).....	133
Figure 5.32. Navier centré de la poutre P1.1 (sans renfort)	133
Figure 5.33. Navier excentré de la poutre P1.1 (sans renfort).....	133
Figure 5.34. Fissure de la lame inférieure en traction	134
Figure 5.35. Rupture de la deuxième lame en partant du bas (face avant à gauche, face arrière à droite)	134
Figure 5.36. Section ¼ - Cisaillement clairement visible grâce aux traits verticaux tracés préalablement sur la poutre.....	135
Figure 5.37. Rupture du renfort carbone en cisaillement.....	135
Figure 5.38. Courbe Force – Flèche de la poutre P 2.2 (renforcée)	136
Figure 5.39. Navier centré de la poutre P 2.2 (renforcée)	136
Figure 5.40. Navier excentré de la poutre P 2.2 (renforcée).....	136
Figure 5.41. Fissure de la lame inférieure par traction.	137
Figure 5.42. Plastification du béton par compression et ruine du bois à l'aplomb.....	137
Figure 5.43. Courbe Force – Flèche de la poutre P 2.3 (renforcée)	138
Figure 5.44. Courbe Force – Flèche de la poutre P 2.3 (renforcée)	138
Figure 5.45. Navier excentré de la poutre P 2.3 (renforcée).....	138

Figure 5.46.	Fissure en traction stoppée par la lame de carbone intermédiaire	139
Figure 5.47.	Ruine de la poutre en cisaillement et rupture du renfort carbone aux extrémités ..	139
Figure 5.48.	Courbe Force – Flèche de la poutre P2.4 (renforcée)	140
Figure 5.49.	Navier excentré de la poutre P 2.4 (renforcée).....	140
Figure 5.50.	Navier excentré de la poutre P 2.4 (renforcée).....	140
Figure 5.51.	Plastification du béton par compression et ruine du bois	141
Figure 5.52.	Courbe Force – Flèche de la poutre P2.5 (renforcée)	142
Figure 5.53.	Navier centré de la poutre P 2.4 (renforcée)	142
Figure 5.54.	Navier excentré de la poutre P 2.4 (renforcée).....	142
Figure 5.55.	Rapport Force / Flèche à mi-travée.....	143
Figure 5.56.	Force – Flèche des poutres renforcées et comparaison avec les prévisions du modèle	
M4 5n (Modèle classique)		143
Figure 5.57.	Force – Flèche des poutres non-renforcées.....	144
Figure 5.58.	Comparaison de déplacements relatifs calculés et mesurés dans les poutres sans	
renfort		145
Figure 5.59.	Comparaison de déplacements relatifs calculés et mesurés dans les poutres	
renforcées		145
Figure 5.60.	Les champs de résistance, respectivement de haut vers bas, en traction de la couche	
1, en cisaillement et en traction normale de l'interface 1-2.		149
Figure 5.61.	A la charge de 63,9kN, la première rupture a eu lieu dans la dernière lamelle de bois.	
.....		149
Figure 5.62.	(a) et (b) La rupture progressive se propage dans les interfaces, la deuxième lamelle	
cas. La chute de charge est jusqu'à 24,9 kN.....		150
Figure 5.63.	Courbe numérique Force – Flèche de la poutre sans renfort	150
Figure 5.64.	La rupture se propage dans l'interface entre les lamelles 2 et 3. La charge augmente	
légèrement.		151
Figure 5.65.	La charge augmente linéairement jusqu'à la première fissure dans la dernière lamelle	
de bois		151
Figure 5.66.	A la charge de 106,74kN, le délaminage légèrement observé dans l'interface autour	
de la fissure transverse.....		152
Figure 5.67.	(a) et (b) Rupture en compression du béton engendre la rupture en compression du	
bois		152
Figure 5.68.	Courbe Force – Flèche de la poutre renforcée.....	153
Figure 5.69.	Courbe Force – Flèche de la poutre numérique.....	153
Figure 5.70.	Le comportement force – flèche est linéaire jusqu'à 150,7kN	154
Figure 5.71.	Configuration de déformation à 181.3kN (avant rupture de la plaque BFUP).....	154
Figure 5.72.	Rupture de la plaque BFUP	154
Figure 5.73.	Schéma du calcul de la hauteur optimale à renforcer	156

Liste des tableaux

2005)	Tableau 1.1.	Caractéristiques élastiques de quelques bois résineux (1) et feuillus (2) (Navi et al., 8	
	Tableau 1.2.	Classification des résistances du bois lamellé collé suivante (EN1194, 1999) (MPa – kg/m ³) (Indice : h – Homogène ; c – Panaché)	15
	Tableau 1.3.	Quelques fibres utilisées en génie civil (Can.J.Civ, 2005)	23
	Tableau 1.4.	Propriétés du béton et du CFRP	33
	Tableau 1.5.	Propriétés des matériaux utilisés, les modules sont en GPa	35
	Tableau 1.6.	Comparaison quantitative entre la solution bois debout avec celle de poutre mixte d'un pont de même portée.	35
	Tableau 2.1.	Synthèse des conclusions de la littérature sur l'efficacité du renforcement du bois.	44
	Tableau 2.2.	Récapitulatif des résultats d'essai. La contrainte maximale a été calculée par le modèle (équations 2.6 à 2.12) avec m = 0.	56
	Tableau 2.3.	Paramètres Weibull pour la raideur en flexion	57
	Tableau 2.4.	Paramètres statistiques de la distribution Weibull de la capacité maximale.....	58
	Tableau 2.5.	Comparaison des déformations pour 2 corps d'épreuve	59
	Tableau 2.6.	Paramètres statistiques de la distribution Weibull de la contrainte maximale en traction dans le bois.	59
	Tableau 2.7.	Paramètres statistiques de la distribution Weibull de l'épaisseur plastique	60
	Tableau 2.8.	Propriétés des matériaux	89
	Tableau 4.1.	Propriétés des matériaux	103
	Tableau 4.2.	Configuration des séries d'essais.....	103
	Tableau 4.3.	Géométrie des éprouvettes et Résultats bruts	105
	Tableau 4.4.	τ_{cr} calculé avec 1 maille (Figure 4.7.c) – modèle M4-2n+1	105
	Tableau 4.5.	Valeur de τ_{cr} avec 3 maillages différents	107
	Tableau 4.6.	Synthèse des résultats d'essais	107
	Tableau 5.1.	Caractéristique du BFUP (BSI®)	114
	Tableau 5.2.	Module d'Young longitudinal du bois Pin sylvestre.....	114
	Tableau 5.3.	Propriétés du plat Sika Carbodur S812	114
	Tableau 5.4.	Résultat de calcul - Contraintes maximales dans les poutres sans renfort (entre parenthèses sont affichées les résistances caractéristiques)	123
	Tableau 5.5.	Résultat de calcul - Contraintes maximales dans les poutres renforcées (entre parenthèses sont affichées les résistances caractéristiques)	124
	Tableau 5.6.	Résistance et flèche maximales.....	124
	Tableau 5.7.	Évaluation des effets de renforcement sur la résistance des poutres en flexion.....	146
	Tableau 5.8.	Configuration de la poutre sans renfort simulée	148
	Tableau 5.9.	Paramètre statistique de la poutre sans renfort	148
	Tableau 5.10.	Modules et résistances du bois des parties d'extrémités.(voir le Tableau 2.6)	148

Introduction générale

Contexte de la thèse

Le ministère de l'écologie ambitionne, au travers de ses services scientifiques et techniques, d'accroître l'usage du matériau bois dans la construction, et en particulier pour les ouvrages d'art. La principale raison est d'ordre environnemental. En effet, on sait que le bois piège du CO₂ pendant la durée de vie des structures, et que, pour certains scénarios de fin de vie, notamment l'enfouissement, ce piégeage peut encore être prolongé sur des longues durées. D'autres scénarios de fin de vie permettent plutôt de récupérer de l'énergie. De plus, le bois est le seul matériau structurel renouvelable qui, à la condition que la gestion des forêts soit satisfaisante, sera indéfiniment disponible sur la planète. Par gestion satisfaisante, il faut comprendre entre autre le maintien de la disponibilité de la ressource. Le rapport annuel de l'Organisation des Nations Unies pour l'alimentation et l'agriculture (FAO), sur la situation des forêts du monde, montre que les ressources forestières de l'Europe, et de la France particulièrement, sont en légère augmentation si l'on compare les années 2005 et 1990.

Le contexte politique est donc favorable à un développement de l'usage du bois dans les constructions. Contexte accentué par la disponibilité de recommandations et réglementations récentes. Tout d'abord il faut citer l'Eurocode 5 qui est officialisé. La cohérence de présentation de l'ensemble du corpus des Eurocodes, y compris l'EC5 sur le bois, est un élément moteur déterminant pour la diversité des matériaux proposée dans les projets de construction. Cela a en particulier pour effet d'encourager les bureaux d'études non spécialisés à se lancer dans le calcul de structures en bois. Ensuite, dans le domaine des ponts, des recommandations pour assurer la durabilité et pour réaliser des visites d'inspection et contrôler l'état de santé des ouvrages sont éditées en France : le guide pour assurer la durabilité des ponts en bois du SETRA, le Guide LCPC pour l'inspection des ponts en bois et le Guide de Conception par l'AFGC.

Existe-t-il pour autant des voies de recherche inexplorées ayant trait à l'amélioration des performances du bois dans les constructions ? D'un point de vue mécanique, le bois est l'un des meilleurs matériaux sur le plan de la rigidité et de la résistance d'une poutre en flexion rapportée à sa masse. Pourtant, il ne bénéficie pas d'une image de matériau « high tech », et semble, quand on parle d'innovation technologique, appartenir au passé. A y regarder de plus près, le matériau bois a pourtant un potentiel d'innovation important. On le chauffe à haute température pour transformer la lignine en un composé assurant une grande durabilité en milieu humide, on le déroule pour fabriquer des multicouches de très grande dimensions pratiquement sans défaut, donc très résistant, etc. Comme il se prête bien au collage ou au formage, des possibilités formelles sont à découvrir. C'est d'ailleurs ce qu'entreprend l'EPFL sur les structures plissées à base de bois. A une échelle inférieure, i.e. celle du matériau, les recherches actuelles entreprises à l'UMR Navier sur l'architecture des âmes de sandwich peuvent être pris en exemple, et permet de préciser la question posée précédemment : peut on améliorer les performances, mécaniques ou autres, du bois, en proposant une architecture spécifique ou en recourant à d'autres matériaux utilisés en association avec le bois ? Cette question a déjà reçu une réponse prometteuse au travers du travail de Pham (UMR Navier) sur les tabliers mixtes en bois-béton ultra performant. Il nous apparaît important de poursuivre dans cette voie.

Les tabliers de ponts mixtes en bois – béton couvrent une portée pouvant atteindre 25 à 30 m. Selon le rapport du WP3 du Projet Européen NR2C, dévolu aux « ponts du futur », 80% des ponts entrent dans ce domaine de portée. Un travail d'amélioration des tabliers concernés est donc productif, puisque détenteur d'un fort potentiel d'applications. Au potentiel lié à l'impact environnemental des solutions recourant au bois, mais qui doit être quantifié au cas par cas, s'ajoutent des avantages indéniables : légèreté, coût de transport et de montage, temps d'exécution...

Objectif de la thèse

L'homogénéité du bois est naturellement faible : les valeurs de résistance en flexion du cinquième centile et du quatre vingt quinzième centile sont très éloignées du fait de l'incidence forte des défauts inhérents aux bois courants résineux sur la capacité mécanique. L'enjeu, nous apparaissant important pour l'application des ponts, est de proposer un matériau pour lequel l'influence des défauts est réduite au maximum, de manière à profiter au mieux des performances des fibres de cellulose.

L'objectif principal de la thèse est de fournir, dans l'optique de propositions innovantes pour les ponts, un outil de dimensionnement et d'optimisation en traction et en flexion d'un matériau architecturé constitué majoritairement de bois et renforcé par un composite de type carbone ou autre. Corrélativement, une validation expérimentale sur maquettes de tabliers de ponts est projetée, ainsi que la proposition d'une méthode de calcul simplifiée en flexion de la résistance des structures proposées.

Organisation de la thèse

Le premier chapitre aborde les problèmes principaux des ponts mixtes en bois. Y sont abordées les propositions de la littérature pour augmenter la performance en flexion de structures en bois. Les matériaux à fort potentiel sont décrits. Une exploration, s'appuyant sur des calculs numériques, de l'organisation des multi couches à base de bois est présentée.

Le second chapitre, qui répond à un manque de consensus de la littérature sur l'apport des renforcements en composite, présente une étude expérimentale pour l'évaluation statistique de l'efficacité du renforcement par composite de carbone sur la résistance de poutres en bois sous sollicitation de flexion.

Le chapitre 3 aborde des modèles théoriques pour l'analyse des structures multicouches, et présente un modèle, fondé sur les modèles multi particuliers pour les matériaux multicouches (M4), pour la prise en compte de l'endommagement dans les couches et les interfaces. Il s'agit de prévoir les conditions de délaminage consécutives à la création d'une fissure de traction dans une lamelle de bois.

Le chapitre 4 présente des expériences visant à déterminer, à l'échelle locale sur les assemblages bois carbone, un critère de rupture d'interface du bois par délaminage. Ce critère est identifié à partir d'une analyse par les modèles M4.

Enfin, le dernier chapitre consiste en la présentation et l'analyse des résultats d'une campagne d'essai de 8 prototypes à l'échelle 1/3, réalisée dans le but de valider le principe de renforcement déduit des autres chapitres. Un mode de renforcement du bois en flexion y est proposé.

Chapitre 1. Généralité sur les ponts mixtes en bois

Dans ce chapitre, nous allons d'abord présenter brièvement les atouts du matériau bois pour la construction. Après une revue générale des ponts en bois nous abordons ensuite les particularités concernant les matériaux innovants, les méthodes de renforcement, les connexions, etc..., dont la connaissance est nécessaire pour concevoir des structures hybrides. Nous réalisons enfin des calculs pour évaluer la performance de structures en nids d'abeille en bois, en recherchant l'utilisation optimale de la matière en sollicitation de flexion. Nous montrerons ainsi que la forme en nid d'abeilles, bien que séduisante sur le plan théorique, est trop souple pour les applications de ponts. La solution mixte, dans la continuité des travaux de Pham (Pham 2008) est finalement présentée.

1.1. Le bois : un matériau renouvelable

Le bois est largement distribué dans le monde. En Europe, et en France particulièrement, les ressources forestières sont abondantes et même en augmentation [source FAO et IFN] (Figure 1.1 et Figure 1.2).

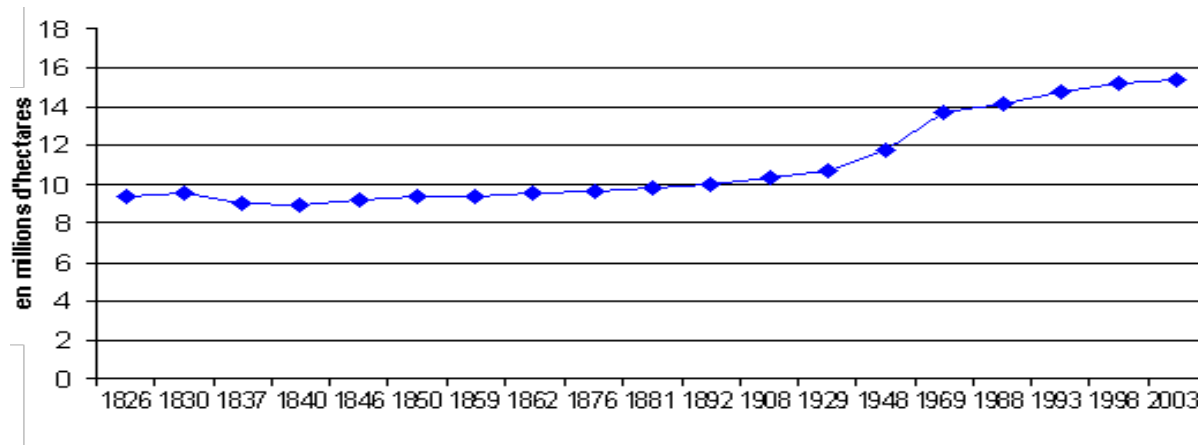


Figure 1.1. *L'évolution de la superficie forestière en France (source IFN)*

En Europe, plusieurs études confirment que la croissance forestière dépasse la récolte dans les pays CEEONU (Figure 1.3). En fait, la croissance dépasse la récolte de manière que, sauf en cas d'augmentation des coupes, les forêts sont susceptibles de subir des impacts négatifs dus à une réduction de la vigueur et une sensibilité accrue vis-à-vis des insectes, des maladies, des tempêtes et des incendies.

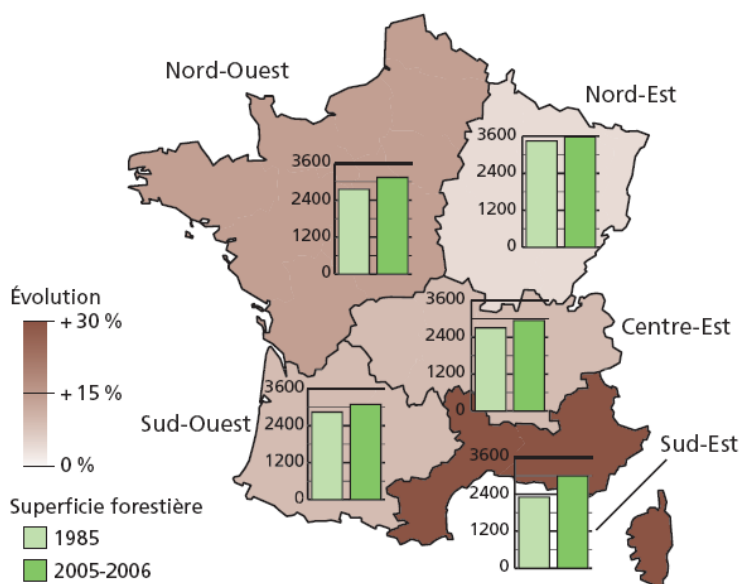


Figure 1.2. *Évolution de la superficie forestière (peupleraies exclues, bosquets inclus) sur 20ans par interrégion (en milliers d'hectares). (Source IFN)*

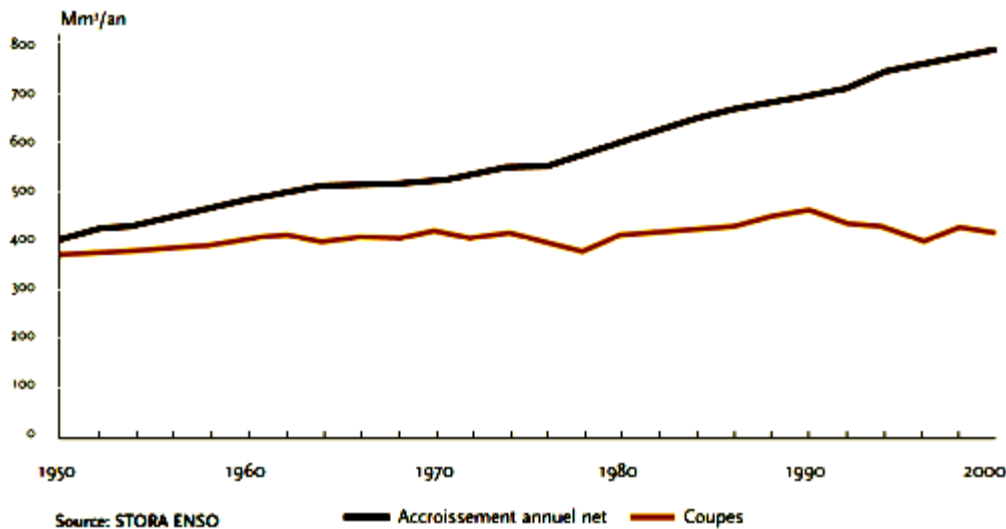


Figure 1.3. Croissance forestière supérieure à la récolte en Europe [Stora Enso]

Il est à présent communément admis que l'utilisation du bois comme source de matériau renouvelable contribue à réduire l'impact du changement climatique. Le monde scientifique a accepté que le piégeage prolongé de CO₂ dans les produits à base de bois forme un puits de carbone (Figure 1.4). La portée de cette figure n'est cependant pas très grande car elle se limite à la comparaison des matériaux entre eux, sans faire état des volumes à utiliser pour les ouvrages, et sans mentionner si la fin de vie du matériau est prise en compte. Il est pourtant préférable de comparer les ouvrages entre eux plutôt que les matériaux, étant donné que, selon leurs caractéristiques mécaniques, ceux-ci seront utilisés à des volumes différents. De plus, si le contenu carbone des matériaux est une donnée utile, elle est insuffisante pour réaliser un bilan objectif, car c'est plutôt en termes de cycle de vie qu'il faut raisonner, c'est-à-dire en intégrant l'ensemble des phases de la vie d'un ouvrage.

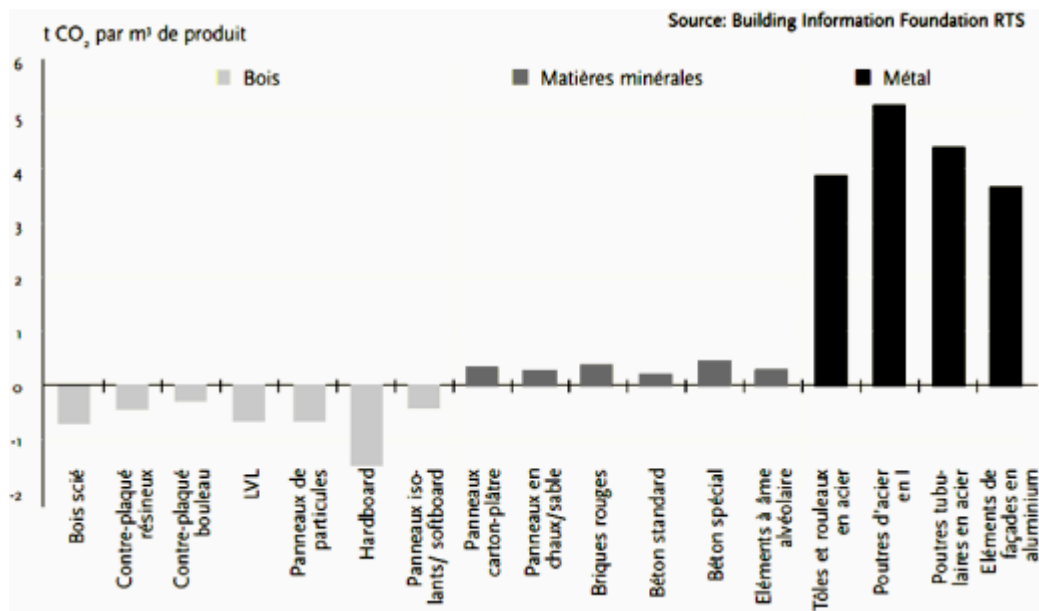


Figure 1.4. Piégeage du carbone dans les produits à base de bois (d'après Building information foundation)

Bouhaya, Le Roy et Feraille [Bouhaya *et al.*, 2009] ont réalisé une analyse de cycle de vie complète d'un ouvrage d'art mixte en bois. Les auteurs concluent que selon l'utilisation en fin de vie

du bois, le bilan est positif, soit du point de vie CO₂, soit du point de vie énergétique. Pour faire un tel calcul, il faut connaître les données liées à chaque élément de la structure, ce qui est possible par une analyse des données des fiches de déclaration environnementales et sanitaires d'éléments de structures (FDES), publiées par le CSTB (base de données INIES). A partir de la FDES d'une poutre de lamellé collé, on peut calculer que le bilan carbone de la phase production du matériau, en sortie d'usine, c'est-à-dire hors transports, pose sur chantier, et traitement en fin de vie, est de -480 kg/m³. Ce chiffre très prometteur pour l'usage du bois, participe au bilan de la poutre lamellé collé sur son cycle de vie. Le point crucial est alors la gestion de fin de vie du bois, ce dernier pouvant être enfoui dans une décharge spécialisée limitant la dégradation du matériau, utilisé comme énergie thermique dans une filière bois-énergie, ou réutilisé dans une autre filière industrielle comme celle des panneaux par exemple.

1.1.1. Essences et microstructure du bois

Les essences du bois peuvent être classées en deux catégories principales : Résineux (ou conifères) et Feuillus. La différenciation se fait sur le système de reproduction, mais aussi sur leur micro structure [Navi, 2005].

Les propriétés au sein d'une même essence subissent des variations d'un sujet à l'autre. La localisation géographique, le climat, les conditions du sol, etc..., influencent la vitesse de croissance du bois et, par conséquent, ses propriétés. La performance du matériau en termes de rapport entre la résistance et la densité est due à la composition microstructurale en cellules du bois. Les cellules du bois se composent de plusieurs couches, comme les structures lamellées. L'angle des microfibrilles dans la couche S₂ (Figure 1.5) joue le rôle principal dans la qualité mécanique du bois. L'augmentation de cet angle fait diminuer la résistance du bois.

Plusieurs autres paramètres comme les nœuds, les fissures transversales ou longitudinales (engendrées par le séchage), la pente des grains, etc... génèrent une variation très large dans la qualité et la résistance du bois. Un bois idéal est défini comme ayant des fibres droites, ne présentant ni nœuds, ni fissures longitudinales et ayant une structure anatomique homogène.

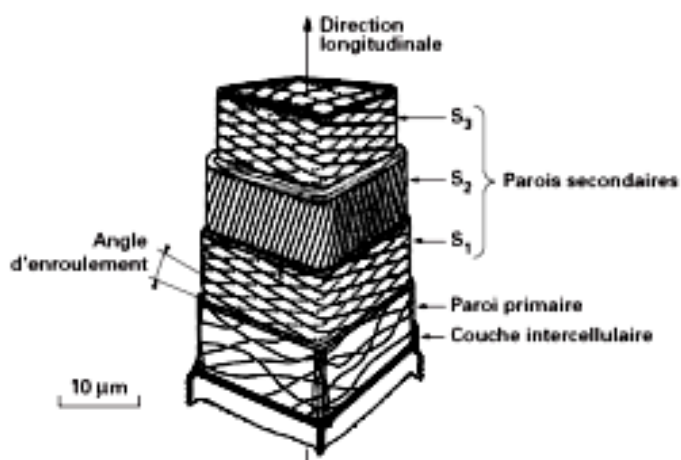


Figure 1.5. Structure cellulaire du bois [Triboulot, TDI]

Anisotropie du bois

L'anisotropie du bois est élevée. Pour simplifier, on considère le bois comme un matériau orthotrope, où les trois orientations sont, en considérant un tronc coupé transversalement, radiale, normale d, tangentielle et longitudinale, comme décrites dans la Figure 1.6.

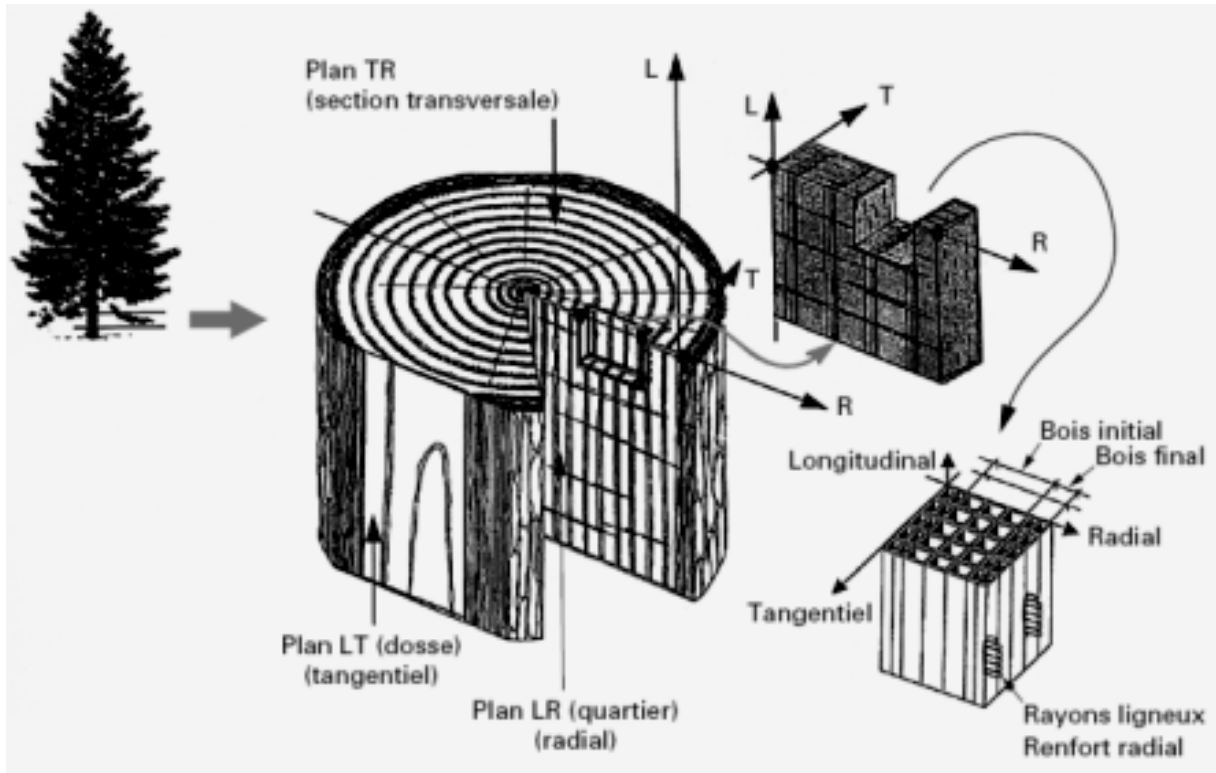


Figure 1.6. De l'arbre au comportement anisotropie

En conséquence, douze constantes dont neufs indépendants sont nécessaires pour décrire le comportement mécanique du bois :

Trois modules d'Young

Trois modules de cisaillement

Six coefficients de Poisson.

Le bois ne présente pas des propriétés mécaniques homogènes. Quelques propriétés comme la résistance en traction, en compression ou cisaillement peuvent être dix fois plus ou moins élevées en comparant entre les différentes éprouvettes d'une même essence [Faye, 1997]. La loi de Hooke généralisée, en notation d'ingénieur, s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_r \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{rt} \\ \gamma_{tl} \\ \gamma_{lr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_l} & -\frac{\nu_{rl}}{E_r} & -\frac{\nu_{tl}}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{lr}}{E_l} & \frac{1}{E_r} & -\frac{\nu_{tr}}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{lt}}{E_l} & -\frac{\nu_{rt}}{E_r} & \frac{1}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{rt}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{tl}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{lr}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_r \\ \sigma_t \\ \tau_{rt} \\ \tau_{tl} \\ \tau_{lr} \end{bmatrix}$$

Où :

$\varepsilon_l, \varepsilon_r, \varepsilon_t$ sont les déformations selon les trois axes

$\gamma_{lr}, \gamma_{rt}, \gamma_{tl}$ sont les distorsions selon les trois plans

E_l, E_r, E_t sont les modules d'Young selon les trois axes

G_{lr}, G_{rt}, G_{tl} sont les modules de cisaillement selon les trois plans

$\sigma_l, \sigma_r, \sigma_t$ sont les contraintes normales selon les trois axes

$\tau_{lr}, \tau_{rt}, \tau_{tl}$ sont les contraintes de cisaillement selon les trois plans

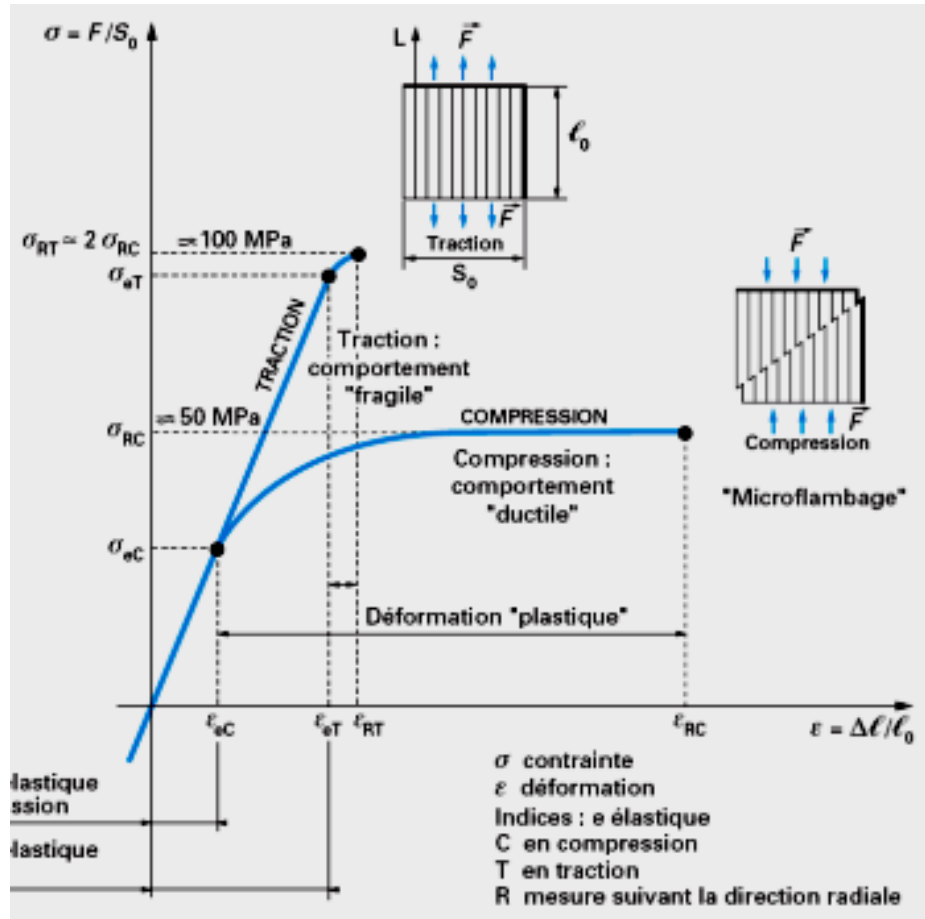
1.1.2. Propriétés mécaniques et classification

Le Tableau 1.1 présente des modules élastiques et des propriétés de quelques essences fréquemment utilisées dans la construction du génie civil.

Constantes	Epicéa (1) (<i>pieca sitchensis</i>)	Douglas (1) (<i>pseudotsuga menziesii</i>)	Sapin (1) (<i>abies</i>)	Peuplier (2) (<i>populus alba</i>)	Chêne rouge (2) (<i>quercus rubra</i>)	Hêtre (2) (<i>fagus silvatica</i>)
Teneur en eau [%]	12	12	13	14	12	11
Densité [g/cm ³]	0,36	0,59	0,31	0,4	0,6	0,74
E_l [N/mm ²]	10 700	16 550	8020	6830	14 800	14 000
E_r [N/mm ²]	649	1300	816	1190	1500	2280
E_t [N/mm ²]	348	900	304	493	828	1160
G_{rt} [N/mm ²]	533	1200	558	1000	967	1640
G_{rt} [N/mm ²]	41	80	48	200	398	470
G_{tl} [N/mm ²]	438	929	461	900	695	1080
ν_{rt}	0,02	0,03	0,03	0,04	0,06	0,07
ν_{tr}	0,3	0,41	0,25	0,37	0,33	0,36
ν_{lr}	0,4	0,38	0,33	0,45	0,69	0,52

Tableau 1.1. Caractéristiques élastiques de quelques bois résineux (1) et feuillus (2) (Navi et al., 2005)

Il est important d'être conscient de la variation de ces propriétés dans la conception de structures en bois. Les courbes contrainte-déformation typiques du bois en traction et en compression parallèle et perpendiculaire aux fibres sont représentées sur la Figure 1.7.. En compression, le bois est par contre ductile. La grande faiblesse mécanique du bois est en traction dans le sens perpendiculaire aux fibres. La résistance en traction perpendiculaire aux fibres, f_{t90} est nettement inférieure aux autres (Tableau 1.2), et la rupture présente un caractère fragile. La résistance est pratiquement divisée par 100 par rapport au sens parallèle aux fibres. Les sollicitations en traction perpendiculaire aux fibres sont donc à éviter dans la conception des structures en bois.



La distribution de la résistance du bois, pour la même essence et classe, est assez large et très variée selon la direction de sollicitation. Les résistances en traction transversale et au cisaillement du bois sont très faibles, ceux-ci sont de l'ordre de 0.5MPa en traction transversale et de 3MPa en cisaillement. La résistance longitudinale en compression, quant à elle, est beaucoup plus élevée : elle est de l'ordre de 40 à 50MPa . Cependant, les défauts (nœuds par exemple.) influencent aussi sur l'anisotropie de la résistance. Les nœuds sont les cicatrices des branches. Ils sont sains et adhérents lorsqu'ils sont issus de la partie vivante de la branche, noirs et non adhérents si la branche est morte. La géométrie du nœud dans la poutre dépend de la position de la planche dans le billon et du mode de débit. Ce type de défauts est critique essentiellement en traction. C'est pourquoi la résistance en traction longitudinale du bois présente une forte variabilité, si bien que la valeur de dimensionnement devient normalement plus faible qu'en compression.

La répartition de la résistance du bois peut être décrite par la loi de Weibull (Weibull, 1951), qui est basée sur le concept du maillon le plus faible. Elle caractérise le comportement parfaitement fragile du matériau en traction. Formellement, les hypothèses de Weibull peuvent s'appliquer à un

comportement non fragile si les volumes élémentaires ont un comportement ductile. Weibull a proposé la fonction de répartition des résistances, σ , d'un volume V sous la forme empirique suivante :

$$F_u(\sigma) = 1 - \exp\left(-\int_V \left(\frac{\sigma - \sigma_0}{m}\right)^k dV\right) \quad (1.1)$$

Où k est le module de Weibull, ou facteur de forme, m est le facteur de normalisation, ou d'échelle, σ_0 , une valeur de référence. Dans le cas où σ est indépendant de V , la fonction de répartition pour le volume V est :

$$F_u(\sigma) = 1 - \exp\left(-V \left(\frac{\sigma - \sigma_0}{m}\right)^k\right) \quad (1.2)$$

L'application de la théorie de Weibull est en particulier justifiée par l'existence d'un effet d'échelle sur la résistance, effet mis en évidence par de nombreux auteurs [Faye, 1997].

L'effet d'échelle a été décrit par cette théorie dans le cas de sollicitations pour lesquelles le mode de rupture présente un caractère fragile (traction, cisaillement ...). Si nous considérons deux éprouvettes de volume différents V_1 , V_2 , le rapport de résistances pour toute valeur de probabilité est donné par :

$$\frac{(\sigma_q)_1}{(\sigma_q)_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^{\frac{1}{k}} \quad (1.3)$$

La formule (1.3) permet de quantifier l'effet d'échelle à partir d'essais réalisés sur des éprouvettes de taille différente. Le paramètre k peut être directement déduit de l'ajustement statistique des valeurs de résistance.

Nous verrons que l'analyse de Weibull nous renseignera sur la performance des renforcements du bois par des composites à matrice organique.

Le bois est un matériau hygroscopique dont les propriétés mécaniques et physiques dépendent aussi du taux d'humidité. Les phénomènes proportionnels à l'humidité comme le retrait et le gonflement sont donc à ne pas négliger, les variations totales radiales sont pour un résineux de l'ordre de 5%, tandis que celles tangentielle d'environ 8. Il est parfois indispensable de tenir compte de l'anisotropie du retrait (Figure 1.8), notamment pour l'ébénisterie, ou les assemblages de pièces de charpente.

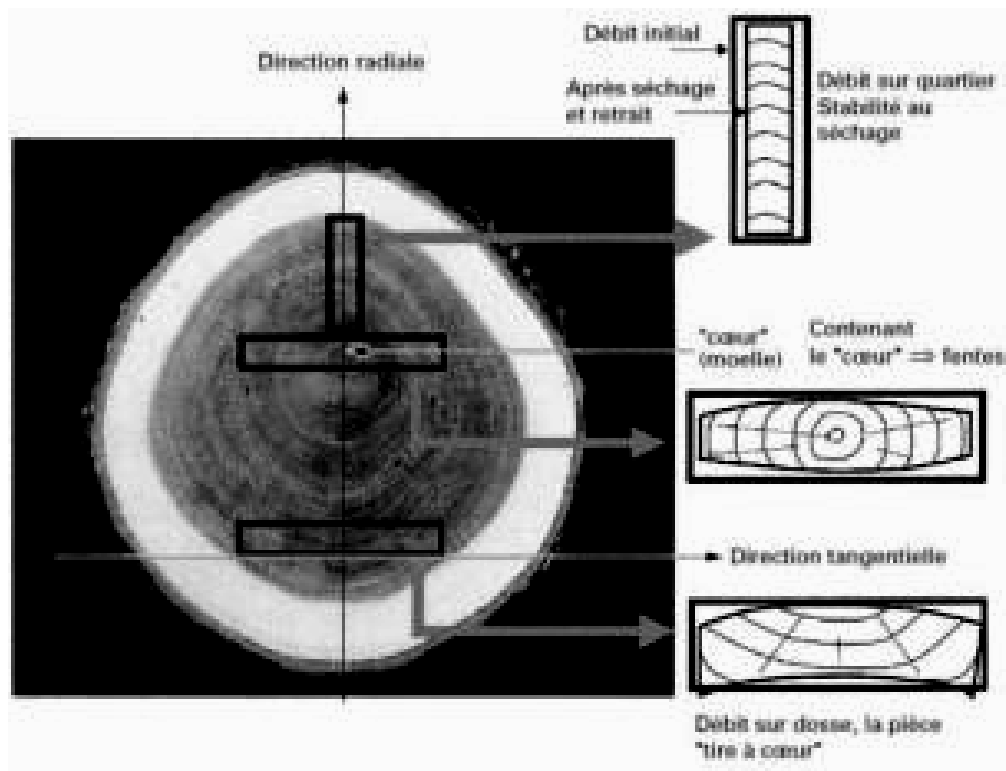


Figure 1.8. Retrait et déformation du bois au cours du séchage [Triboulot, TDI]

Une autre propriété utile à l'ingénieur pour le dimensionnement des ponts en bois est le fluage. Le fluage du bois à humidité constante est modérée : pour de faibles contraintes, la déformation instantanée peut être, grossièrement, multipliée par 1,4 au bout d'un an. Mais si les conditions d'humidité sont variables, l'amplitude du fluage est bien supérieure. Cela s'appelle le mécanisme *mécanosorptif* du fluage. Il est connu depuis longtemps mais sa prédiction quantitative et ses conséquences pour les structures bois soumises à un climat réel et aux charges sont encore mal comprises (Navi et al., 2005). Les ingénieurs devront tenir compte de cet effet dans les calculs, car il est responsable de la redistribution des efforts dans les connexions, notamment dans les structures hyperstatiques. Le fluage est pris en compte dans la norme EN 1995 par un calcul au temps « infini », et, non pas comme pour le béton, par la l'utilisation d'une loi temporelle du fluage. En fait, le module moyen instantané du bois est divisé par un coefficient $(1+K_{def})$, où K_{def} est un coefficient de fluage dépendant de classe de service de l'ouvrage. K_{def} vaut respectivement 0,6 ; 0,8 ou 2 pour les classes de service 1, 2 et 3. Des progrès sont sans doute à faire sur ce plan pour mieux prévoir le comportement des structures mixtes.

1.1.3. Bois lamellé collé (BLC)

Les conifères sont les essences très largement utilisées pour les structures en lamellé collé. La dimension transversale maximale du bois massif est environ 300 mm, ce qui limite la portée maximale d'un élément en bois. Les structures en treillis, apparues au 19^{ème} siècle (poutres de Warren, Howe, etc.) (Figure 1.9) viennent palier la limitation de portée due aux limitations de longueurs des poutres en bois massif. Les ingénieurs ont ainsi dessiné des triangulations de formes variées, permettant d'atteindre la portée de 30 à 40m pour un pont. La technique du bois lamellé, apparue en 1908, est un autre moyen de surmonter les limites de longueur. Cette technique consiste à coller entre elles, sous presse, des lamelles de plusieurs mètres de longueur, de 30 à 50 mm d'épaisseur environ, de largeur pouvant atteindre 210 mm (et même, mais plus rarement, 240 mm)

Théoriquement, avec cette technique, on peut fabriquer des éléments en bois de dimensions illimitées, cependant la hauteur de 2m des sections est la limite supérieure qu'on a optimisée. (Alann, 2007).

Outre l'extension de la portée, la technique du lamellé collé permet de supprimer les défauts observés sur les lamelles, ce qui autorisent l'obtention de poutres constituées d'un matériau à défauts limités, donc plus performants. Il existe un classement mécanique des bois lamellé collé qui en tient compte (Tableau 1.2).

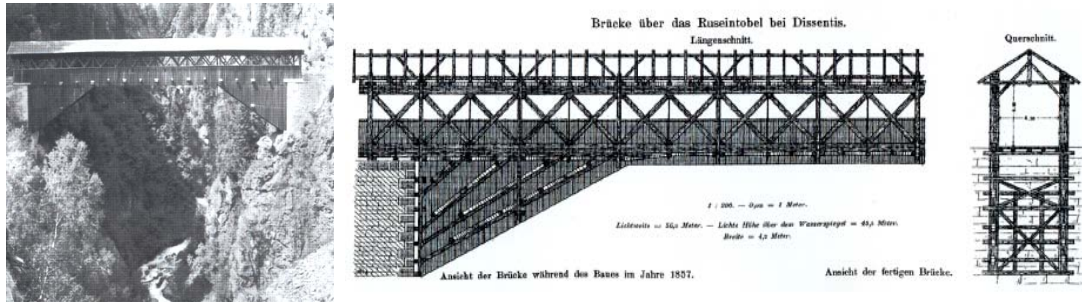


Figure 1.9. Pont en treillis dans le canton de Graubunden (Suisse) construit en 1854 [Steurer, 2006].

Citons également le lamibois (Figure 1.10), qui est un multicouches de lamelles en feuilles (technique du déroulé), placés, pour une poutre, verticalement (horizontalement pour le BLC). La poutre est obtenue à partir de placages de lamelles de 3 mm d'épaisseur collées à chaud sous haute pression avec une résine phénolique. Du fait de la diminution de la taille des défauts, inhérente à la dimension des feuilles, les éléments obtenus couvrent une gamme de résistance, allant jusqu'à 44MPa , en structure de feuilles non croisés, plus importante que le BLC de bois résineux.

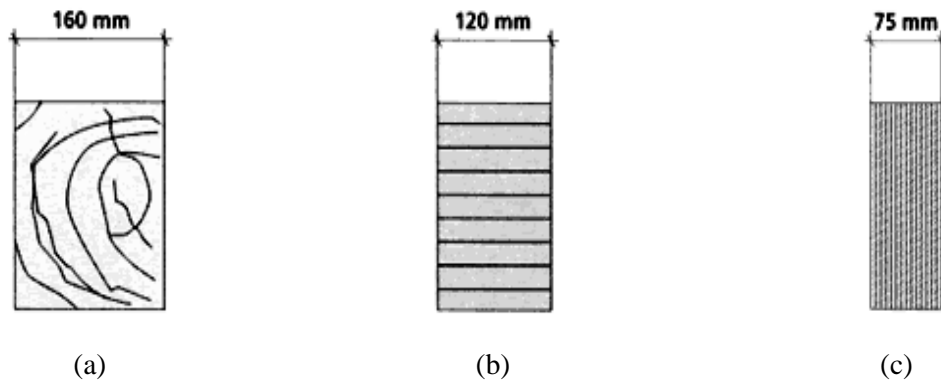


Figure 1.10. Comparaison de trois produits de même résistance en flexion : (a) – Bois massif C24. (b)- Bois lamellé collé classe GL32. (c) Lamibois [Alann, 2007]

De plus, avec la technologie de bois lamellé collé, de nombreuses formes de structures sont possibles (Figure 1.11). Cependant la taille des éléments est limitée en raison du transport, ce qui conduit à prévoir un découpage de la structure et des liaisons appropriées, pour la reconstituer *in situ*.

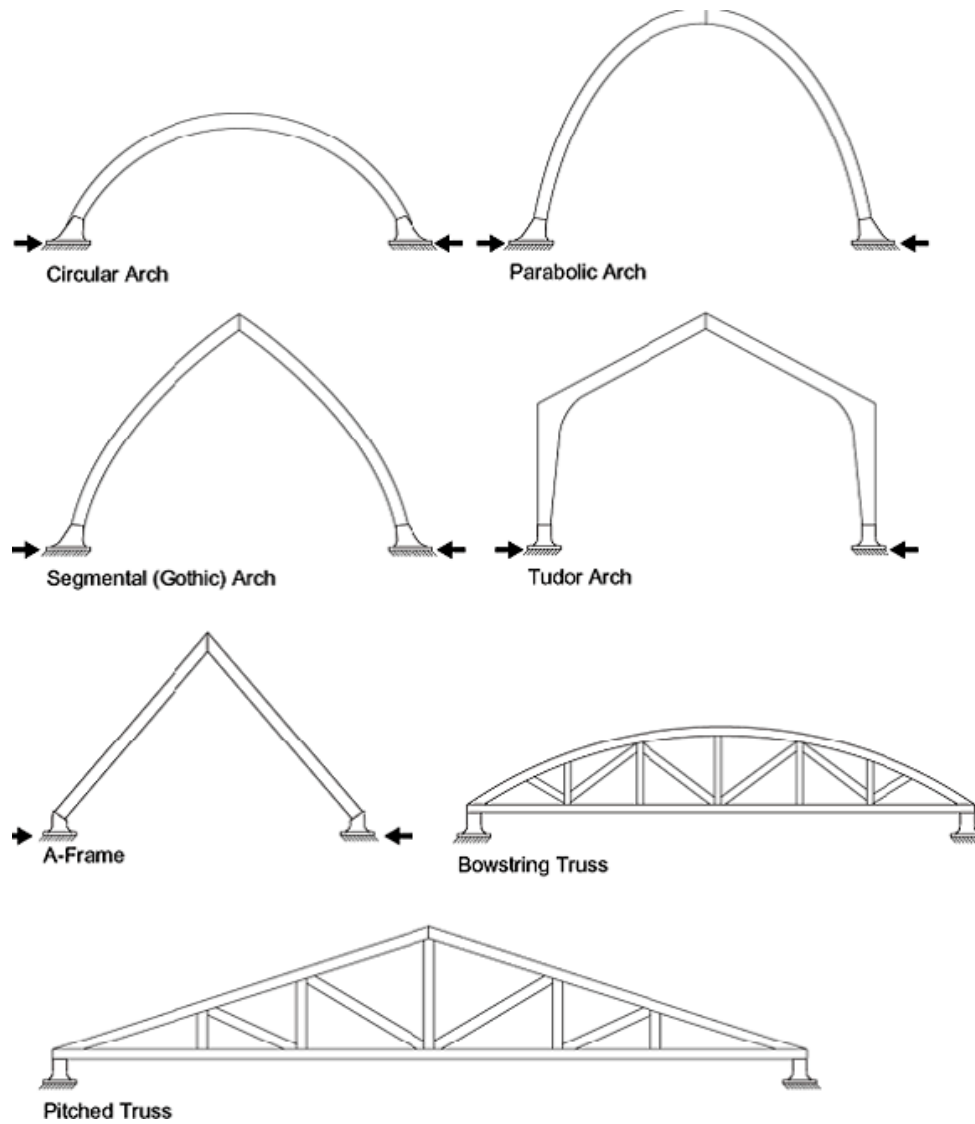


Figure 1.11. Différentes formes des ouvrages en bois lamellé collé [Can.Wood.Council]

Dans la production de bois lamellé collé (Figure 1.12), la classification du bois est réalisée pour déterminer la résistance (classement visuel) et la raideur (classement mécanique). Il est possible de panacher les lamelles en plaçant les plus résistantes au niveau des couches extrêmes des poutres, i.e. du côté où la tension et la compression sont les plus grandes. Les lamelles de même classe seront reliées par aboutages. La technique PRF (*Phenol – Resorcinol – Formaldehyde*) est souvent utilisée, mais également, plus récemment, la colle polyuréthane, performante mécaniquement, et ne dégageant pas de formaldéhyde. Une pression de 0.7MPa est appliquée pendant le collage afin d'obtenir la forme souhaitée et de fournir une bonne liaison entre les lamelles.

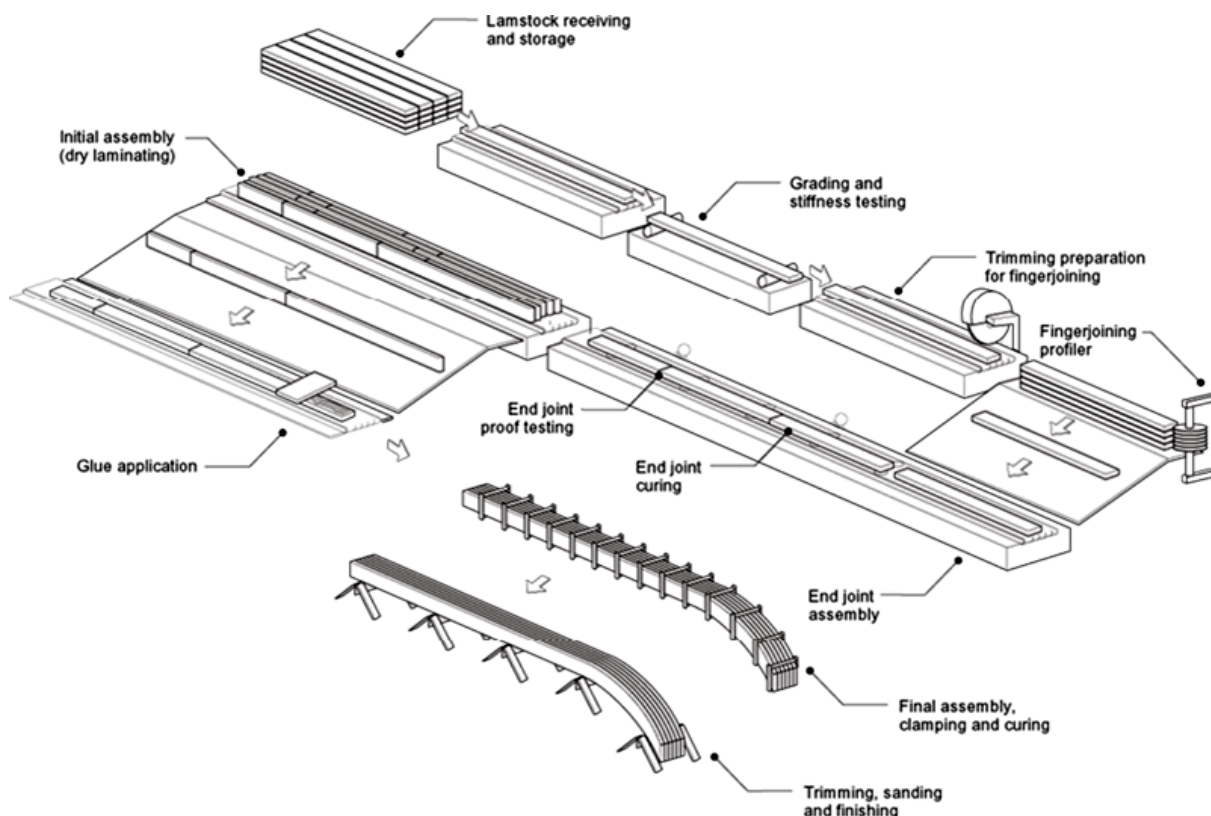


Figure 1.12. Schéma d'une manufacture du bois lamellé collé [Can.Wood.Coucil.2007]

Le BLC présente moins de variabilités et de meilleures propriétés mécaniques que le bois massif puisque les défauts naturels les plus importants sont enlevés avant la fabrication. (Figure 1.13)

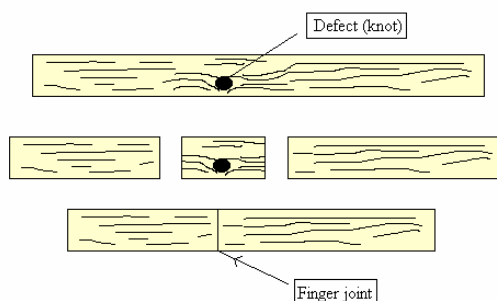


Figure 1.13. Enlèvement d'un défaut avant aboutage

Classification de la résistance du bois lamellé collé

La résistance du bois lamellé collé est définie dans la norme EN 1194. (Tableau 1.2). En France, la classe la plus courante pour les ouvrages est la classe GL24. Il semble que la disponibilité régulière de BLC de classe GL28 ne soit pas encore atteinte, du fait de la faible demande commerciale.

Strength class	GL24h	GL28h	GL32h	GL36h	GL24c	GL28c	GL32c	GL36c
$f_{m,g,k}$	24	28	32	36	24	28	32	36
$f_{t,0,g,k}$	16.5	19.5	22.5	26	14	16.5	19.5	22.5
$f_{t,90,g,k}$	0.4	0.45	0.5	0.6	0.35	0.4	0.45	0.5
$f_{c,0,g,k}$	24	26.5	29	31	21	24	26.5	29
$f_{c,90,g,k}$	2.7	3.0	3.3	3.6	2.4	2.7	3.0	3.3
$f_{v,g,k}$	2.7	3.2	3.8	4.3	2.2	2.7	3.0	3.3
$E_{0,g,mean}$	11 600	12 600	13 700	14 700	11 600	12 600	13 700	14 700
$E_{0,g,05}$	9 400	10 200	11 100	11 900	9 400	10 200	11 100	11 900
$E_{90,g,mean}$	390	420	460	490	320	390	420	460
$G_{g,mean}$	720	780	850	910	590	720	780	850
$\rho_{g,k}$	380	410	430	450	350	380	410	430

Tableau 1.2. *Classification des résistances du bois lamellé collé suivante (EN1194, 1999) (MPa – kg/m³) (Indice : h – Homogène ; c – Panaché)*

1.2. Typologie des ponts en bois

Les premiers ponts du monde étaient construits en bois. Ils jouent un rôle très important dans l'architecture du Moyen Âge, leur mise en œuvre étant facile et peu cher.

Malgré l'apparition ultérieure de nombreux matériaux et techniques de construction durable, l'utilisation du bois dans les ouvrages d'art a perduré jusqu'à nos jours et retrouve actuellement un certain renouveau. Ces structures de franchissement représentent non seulement des ponts couverts des ponts en treillis, des ponts à béquilles mais encore des structures modernes comme les arcs, les ponts haubanés, les ponts mixtes...

Le bois présentant une forte variation par rapport aux autres matériaux du génie civil, son utilisation pour les ouvrages d'art reste limitée à certaines gammes de pont. Dans ce paragraphe, nous allons présenter quelques types d'ouvrages d'art adaptés au bois.

1.2.1. Ponts couverts

Les éléments structuraux en bois soumis à l'exposition directe des intempéries doivent être réalisés avec des essences de bois adaptées, c'est-à-dire résistants à la classe de risques correspondante (classe 3 ou 4). Cependant les observations de terrain menées par le réseau des laboratoires des ponts et chaussées amènent à la conclusion que les grandes poutres en BLC exposées directement aux intempéries, même réalisées avec des bois adaptés, sont soumises à une fissuration importante sous l'effet des variations hydriques, ce qui diminue grandement leur durée de vie, celle-ci pouvant être inférieure à 20 ans.

Aussi, une couverture globale de l'ouvrage constitue une bonne protection qui fait augmenter de manière très importante la durée de vie. Les ponts couverts sont construits depuis longtemps, par exemple le pont Kapellbrücke (Lucerne, Suisse) (Figure 1.14), construit en 1333 a tenu jusqu'à 1993,

date à laquelle il a péri par le feu à la suite d'un incendie accidentel. Il a été reconstruit ensuite. Il s'agit du premier pont couvert en Europe.



Figure 1.14. *Pont de Lucerne*

En France il existe quelques ponts couverts (pont sur la Dore, Pont des Fayettees par exemple). Le pont sur la Dore est un pont en treillis sans limitation de charges (Figure 1.15)



Figure 1.15. *Pont sur la Dore (1994) (BET Calvi)*

1.2.2. Ponts à poutres triangulaires

L'intérêt de ces ponts est de créer des poutres de grande hauteur équivalente pour franchir une portée importante et pour supporter des fortes charges. Un exemple de ce type est le pont de Vihantasalmi en Finlande (Figure 1.16 et Figure 1.17). Ce pont a été mis en service en 1999. Les poutres triangulées et les longrines sont en bois lamellé collé. La portée totale est de 168m et la structure peut supporter des charges routières.



Figure 1.16. *Pont de Vihantasalmi*



Figure 1.17. *(Vihantasalmi) : Tablier mixte béton – bois lamellé collée*

1.2.3. Ponts à béquilles

Les ponts à béquilles sont bien adaptés au bois car ils permettent de réduire les portées effectives et de faire travailler les béquilles en compression. Le pont de Merle (Figure 1.18), construit en 1999 en est un bon exemple. Ce pont de 57m de long est composé d'éléments en bois lamellé collé de Douglas de classe C30. Une dalle de 25cm d'épaisseur en béton, posée simplement sur des appuis néoprènes, est connectée aux poutres du tablier par des tiges filetées scellées dans les poutres en bois. Bois et béton sont supposés désolidarisés mécaniquement.



Figure 1.18. *Pont de Merle*

1.2.4. Ponts en arc

Le comportement ductile du bois en compression et sa valeur de calcul plus élevée qu'en traction incite naturellement à concevoir des structures principalement comprimées, ce qui est le cas des ponts en arc. Comme exemple, nous citons la passerelle Pinot (Figure 1.19) qui a été réalisé en 1998. Elle est composée principalement d'une structure en arc auto-ancré en bois lamellé collé de classe GL24, et d'une dalle en béton armé sur deux poutres précontraintes.



Figure 1.19. *Passerelle de Pinot – Blagnac (31)*

1.2.5. Ponts suspendus ou haubanés

Les ponts à haubans permettent de franchir une très grande portée. Ce type de pont est élancé, leur raideur est donc faible. Les ponts suspendus de tablier en bois sont souvent des passerelles piétonnes. Le pont Marc Seguin à Tournon est un exemple (Figure 1.20). Cependant, plusieurs accidents survenus au 19^{ème} siècle sur des ponts suspendus à tablier de bois, et dus à des mises en résonnance du fait de leur faible masse, ont vite stoppés leur développement (pont de la Roche Bernard en 1852, pont de la basse chaîne à Angers en 1848).



Figure 1.20. *Pont Marc Seguin, Tournon, reconstruit en 1989*

1.2.6. Ponts mixtes bois - béton

Le principe des ponts mixtes bois béton est le même que celui des ponts mixtes acier-béton. La dalle en béton participe à la reprise des efforts en compression et les poutres en bois subissent des efforts de traction et de cisaillement. Ce type de structure présente l'avantage d'une économie de matière, du fait de la participation active et de manière (au moins partiellement) solidaire des poutres et du hourdis supérieur. De plus, pour beaucoup de ponts, une dalle en béton armé surmonte les poutres en bois, (pont de Merle, pont de Vihantasalmi, etc...). Il est alors intéressant de profiter de leur présence et de les connecter entre eux. En général, les ponts existants en bois présentent une gamme faible de portée de 10m à moins de 50m. Néanmoins, la gamme de portée faible (10m – 25m) intéresse actuellement plus de 80% des ponts en France (NR2C). C'est la raison pour laquelle les ponts en bois

sont, structurellement, une solution à développer. De plus, la plupart des typologies (à l'exclusion toutefois du pont suspendu actuellement abandonné) sont possibles, bien que non toutes égales sur le plan du coût.

Enfin, on s'aperçoit que des formes de structures très utilisées dans l'industrie commencent à recevoir des applications dans les ponts et passerelles. Les nids d'abeille sont par exemple très utilisées dans l'aviation, les bateaux, mais ils font leur apparition dans les ponts sous la forme de panneaux en composites de verre (GFRP) (Keller, 2007). Ces formes modernes méritent notre attention, et il apparaît que leur étude en matériau bois est une piste à creuser. Cependant, ces formes particulières ne permettent pas à elles seules de concevoir un pont. D'autres matériaux sont requis et c'est pour cela que nous effectuons maintenant une description des matériaux performants utilisables dans les ponts en bois.

1.3. Les matériaux innovants

L'urgence de la crise écologique qui se manifeste désormais de manière mondialisée, notamment sur la raréfaction des ressources naturelles, pousse le secteur du génie civil à l'utilisation des matériaux innovants. Le terme « innovant » se comprenant sur le plan environnemental ou mécanique. Une des pistes de recherche s'oriente vers l'accroissement des applications des matériaux, soit renouvelables, soit performants. Avec une période d'environ 50 ans de renouvellement (temps de croissance d'un résineux à pousse rapide), le bois présente des avantages écologiques et économiques évidents. Ce matériau organique possède des propriétés variables, mais, dans une structure de type sandwich, en combinaison avec des matériaux innovants comme le BFUP (béton fibré à ultra performant), les C/G FRP (Polymère renforcé par fibres de carbone/verre)... les propriétés du bois peuvent être grandement améliorées.

1.3.1. Le béton fibré à ultra haute performance

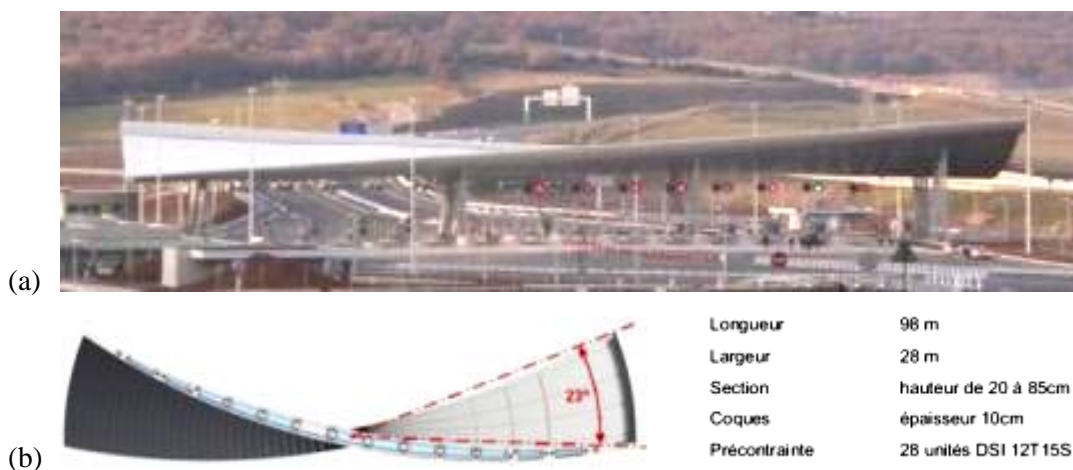
Les progrès des méthodes de formulation du béton et des adjuvants permettent au béton d'atteindre une gamme de matériaux à matrice cimentaire de résistance en compression variant de 150 jusqu'à 250MPa (AFGC, 2002). C'est les bétons fibrés à ultra performance (BFUP).

A la fin des années 1980, Pierre Richard, directeur scientifique de Bouygues, a réalisé une des premières recherches sur les performances du premier BFUP : le BPR., ou béton de poudres réactives. Un peu plus tard, Rossi (Rossi 1997) a poussé le concept du BFUP jusqu'à proposer un matériau ductile en traction : le CEMTEC[®], disposant d'un comportement post-fissuration à écrouissage positif (Figure 1.21).



Figure 1.21. *Multi fissuration du CEMTEC® en traction directe.*

Actuellement, les BFUP sont largement appliqués et commercialisés avec plusieurs marques: Ductal® (Bouygues, Lafarge), BSI® ou CERACEM® (Eiffage, Sika), BCV® (Vicat, Vinci), CEMTEC® au LCPC, et il y a aussi des BFUP développés par des laboratoires (EDF). Avec un module d'Young à 28 jours qui varie entre 50 GPa à 65 GPa, le calcul de structures en BFUP est couvert par les recommandations AFGC – SETRA [AFGC Mai 2002]. Nombreux ouvrages neufs et projets de renforcement-réparation français utilisant le BFUP ont été réalisés : l'aqueduc LGV Est (2004 BSI®), la barrière de péage du viaduc de Millau (2005 BSI®) (Figure 1.22), le pont de Saint Pierre la Cour (2005 Ductal®) (Figure 1.24), le passage sur la A51 (Figure 1.23), le renforcement des piles du pont de Valabres (2006 BSI®), la rénovation des Grands Moulins de Paris (Ricciotti - BSI®)... et plusieurs autres ouvrages internationaux.



Barrière du péage du pont Millau (53 voussoirs – 2300 tonnes de BSI® 2005)



Figure 1.22. Barrière du péage du pont Millau (53 voussoirs – 2300 tonnes de BSI® 2005)



Figure 1.23. Passage sur l'A51



Figure 1.24. Pont de Saint Pierre la Cour, Mayenne (2005 - Ductal® 2005)

Les BFUP contiennent 2 à 3% en volume (à l'exception du CEMTEC® formulé à des taux de 8 à 11 %) de fibres métalliques à haute limite élastique (acier tréfilé) et présentent une ductilité en traction. Dans certains cas, il est possible de se dispenser d'aciers passifs, la résistance en flexion aux ELS étant de 8 à 10 MPa. Ils sont formulés avec un rapport eau / ciment en masse de l'ordre de 0,2, contiennent de la fumée de silice et des granulats fins dont la dimension des plus gros est comprise, selon les formules, entre 400 μm à 6 mm. Les BFUP nécessite des procédures de malaxage longues, jusqu'à 20 minutes, et des malaxeurs réputés performants.

Le BFUP fait un cumul des avantages suivants : La rhéologie du béton fluide, la résistance du béton à haute performance et la ductilité du béton fibré. Le retrait du BFUP se développe essentiellement au jeune âge. Le retrait endogène a une amplitude de l'ordre de 500×10^{-6} , et le retrait de dessiccation 150×10^{-6} . Cela constitue un intérêt pour les structures mixtes grâce à la limitation de déformations et d'efforts parasites consécutives à la connexion, à la condition toutefois d'adopter la technique de préfabrication des éléments en béton. Depuis, de nombreux résultats montrent que l'on n'a pas de risques de fatigue (limite de troncature) pour des charges inférieures à 60% de la capacité de résistance du matériau. Il n'y a donc pas de problème de fatigue pour des structures correctement dimensionnées aux ELS et ELU. (Resplendino, 2006).

Le BFUP est un bon candidat pour la conception des ponts mixtes. La haute résistance en compression et le module élevé contribue à pouvoir dimensionner des éléments dalles de faibles épaisseurs, inférieures à 10cm, ce qui présente un avantage pour limiter le poids propre, et peut rendre possible la conception de tabliers entièrement préfabriqués.

1.3.2. Le polymère renforcé par des fibres (FRP)

Les polymères renforcés par les fibres se composent de 2 composantes essentielles : Les fibres et la matrice (ou résine).

Les matériaux des fibres

Il existe aujourd'hui plusieurs types de fibres : Carbone, aramide, verre, lin... Les plus répandues sont les fibres de carbone et de verre.

Les fibres de carbone sont préparées par l'oxydation, la graphitisation et la carbonisation à haute température de matériaux à haute teneur en carbone, qui sont principalement des celluloses ou des polyacrylonitrile. Les polyacrylonitriles sont les plus couramment utilisés. Ces matériaux conduisent à des fibres de carbone aux propriétés mécaniques les plus élevées. Les fibres de carbone sont de 5 à 15 μm de diamètre. Grâce à la variation de la température de 2600 °C à 3000 °C dans les étapes de la graphitisation, les fibres peuvent être produites à haute résistance (HS) ou à haut module (HM). Les fibres de carbone sont plus chères que les autres (20 à 60 €/kg), mais elles possèdent des propriétés mécaniques plus grandes. L'utilisation des fibres de carbone a été développée dans l'industrie aéronautique depuis longtemps, et elle est actuellement étendue vers plusieurs applications : automobile, sport ... Les fibres de carbone sont utilisées en construction pour le renforcement structurel, en particulier le renforcement des structures en béton armé ou précontraint. Elles se présentent sous forme de plats pultrudés à fibres unidirectionnelles, ou de tissus. Les colles d'application retenues dans les avis technique (ATE) sont de type epoxy.

Le processus actuel dans la production des fibres de carbone conduit à de hautes propriétés mécanique, thermique, chimique... Cependant, la résistance et le module ne sont encore que, respectivement de 7% et 65% de la valeur théorique des fibres de carbone.

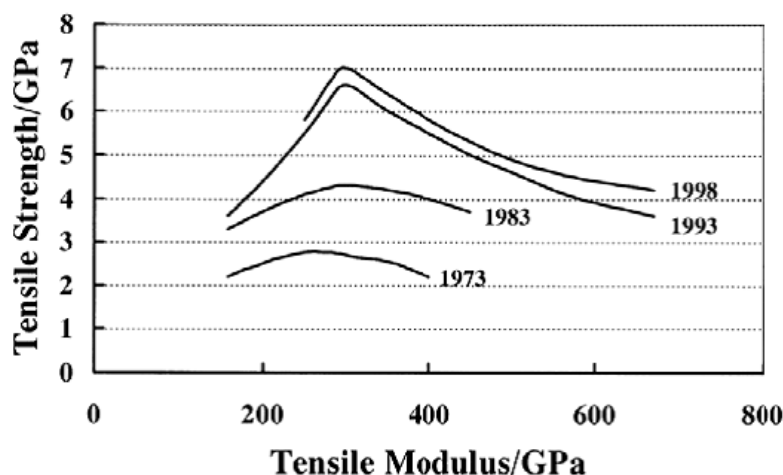


Figure 1.25. Développement du module en traction de fibres de carbone

La matrice

La matrice (ou résine) est une des deux composantes importantes dans les matériaux FRP. Elle permet d'éviter la rupture fragile dans les fibres de fournir la transition des efforts entre elles, et de les

protéger contre les agressions environnementales. Ce sont des critères primordiaux pour la conception de la résine des FRPs.

Property	Unit	GFRP	AFRP	CFRP
Minimum fibre volume ratio		0,55	0,6	0,63
Density	(g/cm ³)	2,1	1,38	1,58
Longitudinal tensile strength	(MPa)	1080	1280	2280
Transverse tensile strength	(MPa)	39	30	57
Longitudinal modulus	(GPa)	39	78	142
Transverse modulus	(GPa)	8,6	5,5	10,3
In-plane shear strength	(GPa)	89	49	71
In-plane shear modulus	(GPa)	3,8	2,2	7,2
Major Poisson's ratio		0,28	0,34	0,27
Minor Poisson's ratio		0,06	0,02	0,02
Maximum longitudinal strain	(%)	2,8	1,5	1,5
Maximum transverse strain	(%)	0,5	0,5	0,6
Longitudinal CTE	(10 ⁻⁶ /°C)	7	-2,0	-0
Transverse CTE	(10 ⁻⁶ /°C)	21	60	27
Relaxation ratio	(%)			2-3

Tableau 1.3. *Quelques fibres utilisées en génie civil (Can.J.Civ, 2005)*

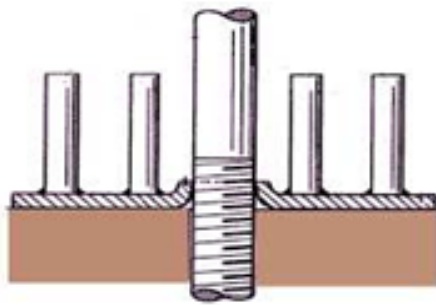
1.4. Association entre le bois et d'autres matériaux

Les assemblages dans les structures hybrides est une problématique très importante, car la performance d'une structure mixte ou hybride dépend fortement de leur efficacité. Leur rôle est de transmettre les efforts internes d'un élément à un autre pour assurer un comportement se rapprochant du comportement monolithique.

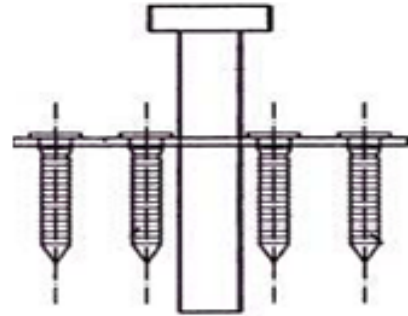
1.4.1. Connexion bois – béton

La connexion bois – béton est étudiée depuis les premières années du 18^{ème} siècle. Pham (Pham, 2006) a classé les systèmes de connexion existants en 2 grandes familles : Les systèmes fonctionnant prioritairement par compression locale et les systèmes fonctionnant prioritairement par le cisaillement surfacique du bois.

Les systèmes de connexion par compression locale du bois (Figure 1.26) sont des éléments qui permettent de transmettre le cisaillement entre le bois et le béton par la compression de ces éléments sur le bois.



(a) Connecteurs de Trygve



(b) Connecteurs de Kuttel

Figure 1.26. *Deux exemples des connecteurs locaux*

Les systèmes de connexion par adhérence des surfaces (Figure 1.27) sont réalisés, soit par des connecteurs locaux continus [Aitcin, 1998], soit par le collage [Pham, 2006].



(a) Connexion de (Pham, 2006)



(b) Collage (Pham, 2007)

Figure 1.27. *Connexion par adhérence des surfaces*



Figure 1.28. *Connexion en métal déployé [De Noray, 2005]*

La littérature montre que les connexions métalliques sont dites « imparfaites », car elles n'empêchent pas un glissement à l'interface bois-béton de s'opérer. Ce glissement est alors

responsable d'une baisse de l'inertie équivalente de la structure, laquelle se traduit par un supplément de souplesse structurelle. Cette souplesse est prise en compte dans la norme EN 1995, laquelle s'appuie sur la théorie simplifiée de Heimeshoff (Heimeshoff, 1987). Le calcul de l'inertie s'effectue selon la formule suivante :

$$(EI)_{ef} = \sum_{i=1}^2 (E_i \cdot I_i + \gamma_i \cdot E_i \cdot A_i \cdot a_i^2) \quad (1.4)$$

Avec,

$$\begin{aligned} A_i &= b_i h_i ; I_i = b_i \frac{(h_i)^3}{12} \\ \gamma_1 &= 1 \\ \gamma_2 &= \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 E_2 A_2}{K \cdot l^2}} \\ a_1 &= \frac{\gamma_2 E_2 A_2 (h_1 + h_2)}{2 \sum_{i=1}^2 \gamma_i E_i A_i} \\ a_2 &= (h_1 + h_2) - a_1 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Où E_i , est le module d'Young de l'élément "i", les autres paramètres étant définis sur la figure suivante (unités SI).

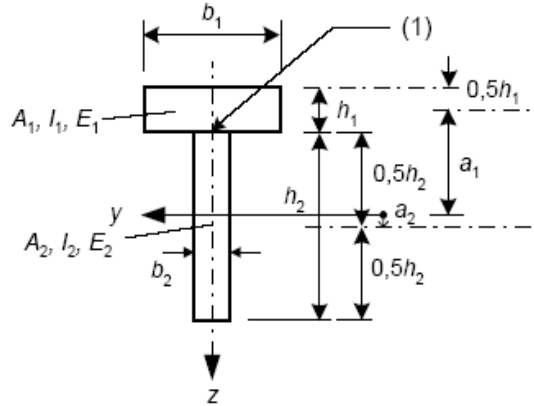


Figure 1.29. Paramètres du modèle de l'EN 1995-1

Un coefficient de rigidité d'interface, K [MN/m²], ($K = k/e$ ou e est l'espace entre organes de connexion et k la rigidité de l'organe en MN/m) entre dans la formule des coefficients γ_i . Il s'agit de la raideur de l'interface, autrement dit la pente de la droite reliant l'effort de cisaillement au glissement de l'interface, dans un essai de type « push out » mettant en jeu une longueur de 1 m d'interface.

Un moyen d'obtenir une connexion parfaite est d'assurer un collage entre les 2 matériaux à assembler. Pham (Pham 2007) a mis au point une connexion par collage du BFUP sur le bois. La rigidité de flexion a été comparée à celle théorique d'une connexion parfaite (full composite action). La Figure 1.33 montre que le comportement structurel dans le cas du collage coïncide avec la connexion parfaite (Le Roy 2009). L'application d'une telle connexion à des ouvrages réels, si performante soit elle sur le plan mécanique sur un cycle de chargement, nécessite de la valider, d'une part en fatigue, et, d'autre part, sur le plan de la durabilité sous chargement hydrique. Sur le premier point, Pham a montré dans sa thèse que l'assemblage collé avait une tenue satisfaisante en fatigue. Pour cela, il réalisa 3 essais de fatigue sur des poutres-dalles composite de 3 mètres de portée,

soumises à un chargement représentant une combinaison d'action dite « ELS rare ». La force maximale du chargement sinusoïdal a été calculée pour que la contrainte de cisaillement à l'interface atteigne la valeur correspondant à la combinaison « ELS rare » du pont de 10 m de portée étudié dans le projet NR2C. Le résultat fût que les corps d'épreuve ont tous résisté à 2 millions de cycles, et, même, pour 2 d'entre eux, à 300 000 cycles supplémentaires à une charge double de la combinaison « ELS rare ». Le second point à valider est la tenue du collage vis-à-vis du chargement hydrique. La thèse en cours de Loulou (2009-2012) du LCPC, à caractère expérimental, porte sur ce thème. Elle est réalisée en collaboration avec le laboratoire régional d'Autun, ce dernier réalisant des tests de chargement de type « push out » sur des corps d'épreuve ayant subi un vieillissement accéléré sous la forme de cycles hydriques.

Cependant, sans attendre la validation de la solution par collage du béton sur le bois, l'école des Ponts, le Sétra, le réseau des LPC, et l'ENSTIB coopèrent pour proposer un pont type bois-béton. L'une des actions à entreprendre est de proposer un connecteur bois-béton pour ce pont type. Cette tâche a été confiée à l'école des Ponts. Dans ce cadre, Blonski (Blonski, 2009) a étudié la rigidité K de différents connecteurs locaux au travers d'essais de push out à 2 plans de cisaillement (Figure 1.32). Il trouve des rigidités de l'ordre de $3,5 \text{ GN/m}^2$ pour des connecteurs locaux espacés de 9 cm (Figure 1.32), alors que Fonlupt trouve une rigidité double de 7 GN/m^2 pour un assemblage collé. Bien que l'assemblage par collage soit plus rigide que celui des connecteurs métalliques, les 2 raideurs mesurées sont très importantes. Pham, qui avait calculé la raideur de connexion à partir d'essais de flexion, trouvait pour le collage des valeurs inférieures à 1 GN/m^2 . Malgré ces différences de raideur, les conséquences sur la rigidité en flexion sont très faibles. Ces différences restent malgré tout encore à éclaircir.

La connexion par collage du BFUP sur le bois ayant fait ses preuves de performances mécaniques, nous décidons, sans attendre la validation en termes de durabilité, que cette solution de connexion est à adopter dans le cadre des études menées dans cette thèse.



Figure 1.30. *Eléments dalle réalisé par Pham. BFUP collé sur BLC*



Figure 1.31. *Corps d'épreuve bois-BFUP en cours d'essai de fatigue en flexion [Pham, 2007]*



Figure 1.32. *Figure essais push out réalisés par Blonski*

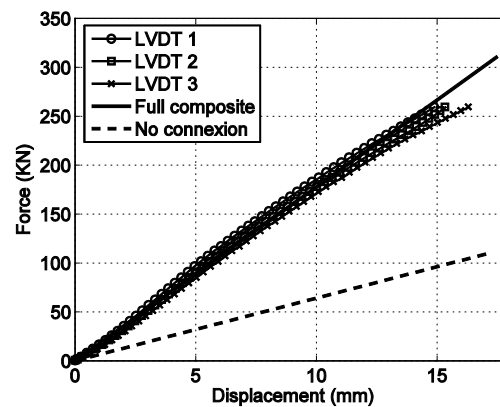


Figure 1.33. *Courbe Force-Flèche – Essai de flexion 4 points des poutres mixtes [Pham, 2007]*

1.4.2. Connexion bois - composite

La connexion entre le bois et le composite est essentiellement réalisée par collage à froid. Il existe différentes techniques de collage qui dépendent du choix des matériaux. Cependant on peut distinguer 2 types principaux :

- Collage direct, pour les applications *in-situ*, à l'aide de colle époxy : de nombreux produits commercialisés sont actuellement disponibles. Ils permettent de réaliser le collage de manière simple et pratique. (Sikadur 30, Sikadur 330, etc.)

- Collage sous pression : Le composite est polymérisé sous pression soit atmosphérique (collage sous vide), soit par pression contrôlée par des vérins hydrauliques. Ces techniques sont plus compliquées où elles sont essentiellement réalisées dans l'industrie.

Il est également possible de réaliser le collage des barres composite sur les éléments en bois, à l'intérieur de trous ou de rainures préparés. Les produits adhésifs sont alors injectés (cas des tiges scellées dans des trous) à l'aide d'une résine fluide, ou appliqués manuellement à la spatule (cas des tiges insérées dans des rainures). Cette dernière technique est dénommée NSM (*Near Surface Mounted*).

Les techniques de renforcement du bois par composites sont traitées en détail dans le chapitre 2.

1.5. Etude exploratoire de solutions structurelles alternatives

Comme nous l'avons signalé précédemment, les solutions de type sandwich en matériaux composites (GFRP la plupart du temps) sont déjà explorées pour des applications de planchers. La performance reconnue des sandwichs réside dans leur légèreté importante pour la sollicitation de flexion. Les panneaux sandwichs ont une rigidité spécifique (rapport à la masse surfacique) très grande. On comprend alors leur fort développement en aéronautique. Ainsi, si on met de côté les questions de coût de production, lesquels dépendent de la demande, nous nous posons ici la question de l'intérêt du bois pour la conception de dalles sandwich. Autrement dit, est-ce que le matériau bois, compte tenu de sa performance en terme de rapport résistance sur masse volumique, et de son anisotropie, constitue un bon choix pour la conception de solutions nouvelles de tabliers de pont s'apparentant à des dalles sandwich ? Pour répondre à cette question, faisons d'abord un résumé des applications d'éléments sandwich en génie civil.

Les progrès de la science des matériaux ont permis de réaliser des structures (à l'échelle macro), utilisant des matériaux, (à l'échelle micro) très performants. Le principe de la technologie *sandwich* consiste à appliquer sur une *âme* (constituée d'un matériau ou d'une structure légère possédant de bonnes propriétés en cisaillement) deux *peaux* de bonne capacité en compression et/ou traction. L'objectif d'un tel procédé est de constituer une structure permettant de concilier légèreté et rigidité en flexion. Cependant, on voit tout de suite que le point faible risque d'être la résistance au cisaillement ou la déformation de cisaillement, les efforts tranchants étant très importants pour les ponts.

L'application des structures *sandwichs* dans les ouvrages d'art n'est pas nouvelle. Par rapport aux ponts à poutres mixtes acier-béton, qui peuvent être considérées comme un sandwich orthotrope de deux couches, il existe également des tabliers mixtes béton-composite (Figure 1.34). Bien que ce type de ponts comporte plusieurs avantages comme la légèreté, la résistance mécanique, la durabilité... le prix est actuellement encore assez élevé.



Figure 1.34. *Pont Miyun - le premier pont en GFRP du monde, 1982, Pékin, China. Longueur 20.7m ; Largeur 9.2m. Dalle de type nid d'abeille en GFRP.*

Les ponts sandwichs en bois, surtout les ponts routiers, ont été abordés théoriquement dans le projet NR2C (Mekki, 2005, Delfino 2006). Nous allons dans ce paragraphe étudier les possibilités structurales des plaques sandwichs utilisant le bois comme âme.

1.5.1. Ponts-dalles sandwichs

Dalle sandwich à âme alvéolaire en bois – Le nid d'abeilles

Beaucoup d'études théoriques et expérimentales ont été réalisées depuis longtemps sur les structures sandwichs alvéolaires. Cette forme (Figure 1.35) permettant de créer des panneaux sandwichs légers, est largement appliquée dans l'industrie, notamment dans l'aéronautique et l'automobile.

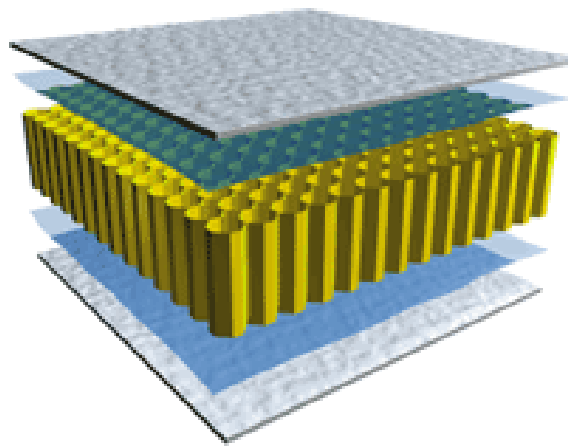


Figure 1.35. *Principe de la dalle sandwich à âme alvéolaire*

Par des essais numériques, Pham Khac (Pham K. H., 2006) a étudié plusieurs géométries de cellules élémentaires composant un nid d'abeilles en bois. Il a conclu que la forme hexagonale est plus performante que celles triangulaires ou carrées, car, elle nécessite le minimum de matériau pour un module de cisaillement hors plan donné. Comme le matériau bois est orthotrope, il a réalisé une étude d'optimisation afin de choisir la direction locale des éléments en bois massif pour avoir un comportement macroscopique optimal de la plaque sandwich. Il a réalisé également une poutre sandwich à âme en nid d'abeilles en bois, d'une épaisseur de 170 mm. La poutre de longueur de 2m a été renforcée en partie supérieure par une plaque de 30 mm de béton UHP armé de fibres de fonte

amorphe et en partie inférieure par une couche de 3 mm de GFRP. Il a observé une différence entre le résultat théorique et expérimental, engendrée par la faiblesse de cisaillement due aux glissements dans les joints de colle des parois (Figure 1.36 à Figure 1.39)



Figure 1.36. *Structure nida réalisé par Pham K.H*



Figure 1.37. *Essais de flexion 3 point*

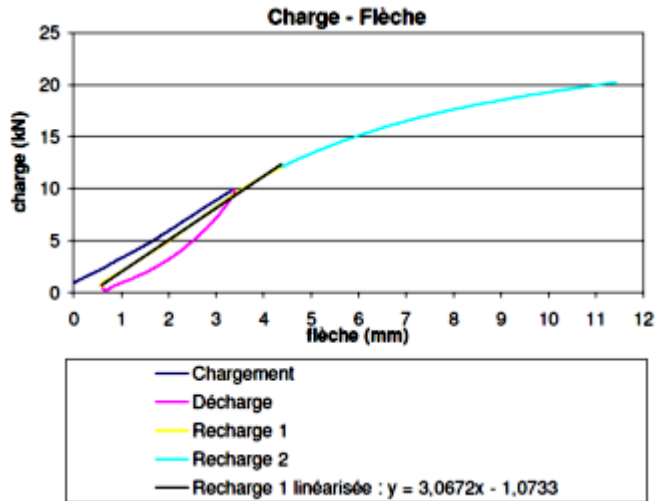


Figure 1.38. Flexion 3 points. Poutres sandwich BUHP 30mm- nid d'abeilles en bois 170mm – GFRP 3mm

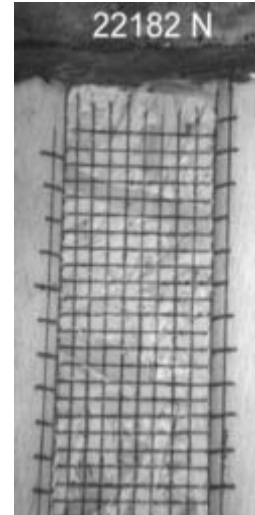


Figure 1.39. Glissement dans les joints de colle visible par le décollage du quadrillage

Le résultat mitigé obtenu par (Pham K.H., 2006) s'explique par un mauvais choix de colle pour l'assemblage des nœuds aux parois du nida. Il nous a semblé utile de creuser un peu plus la performance théorique de telles structures. En se basant sur l'équilibre énergétique, nous avons réalisé une étude d'homogénéisation du matériau *nid d'abeilles* en bois, en le considérant périodique. Un volume élémentaire représentatif (VER) a été choisi et modélisé par le code de calcul d'Abaqus (Figure 1.40).

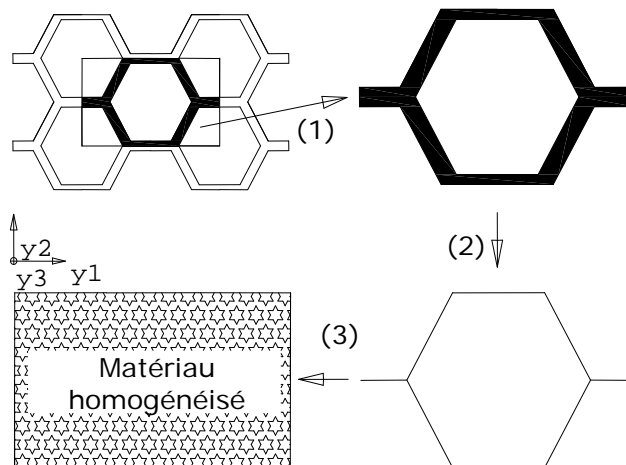


Figure 1.40. Étude d'homogénéisation du matériau nid d'abeilles : (1)Choix du VER. (2)Modélisation en modèle de coque. (3)Détermination des constants du matériau homogénéisé.

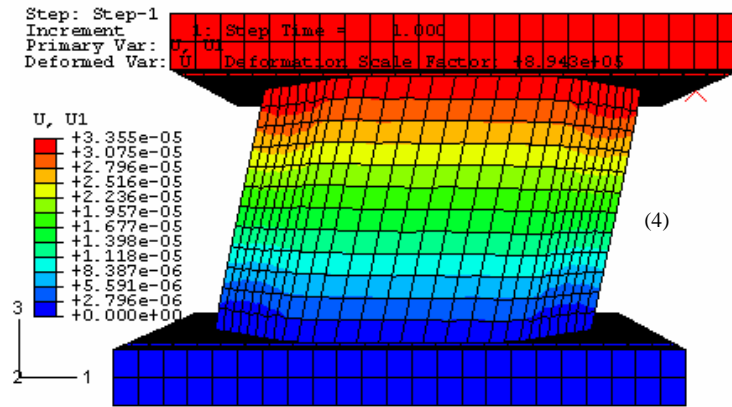


Figure 1.41. *Carto graphique de déplacement U1 - Illustration d'un cas de chargement de cisaillement imposé sur le VER d'une structure nid d'abeilles.*

Les hypothèses retenues pour ce calcul sont les suivantes. C'est un calcul 3D, le bois a un comportement isotrope transverse (mêmes coefficients élastiques dans le sens radial et ortho-radial) (Tableau 1.5). Les conditions aux limites sont périodiques. Les parois sont modélisées en modèle de coque avec 5 points d'intégration. Le calcul consiste à calculer l'énergie de déformation du nida suivant les différentes directions pour calculer, pour chacune d'elle, le coefficient élastique correspondant d'un matériau homogène équivalent. Nous avons donc 6 cas de sollicitations, 3 directions de cisaillement et 3 directions de traction ou compression à partir desquelles la résolution du système d'équation permet de calculer le tenseur élastique (6 constantes déterminées ici)

Les influences de l'épaisseur et de la longueur des parois sur les modules ont été analysées. Pour différentes configurations d'épaisseur de paroi et de longueur d'un côté de l'hexagone, nous avons calculé le module de cisaillement G_{13} (appelé également module de cisaillement hors plan. Axes définis sur la Figure 1.40), c'est-à-dire celui intervenant dans le calcul de la flèche d'un sandwich. Les résultats sont sur les figures Figure 1.42 à Figure 1.44.

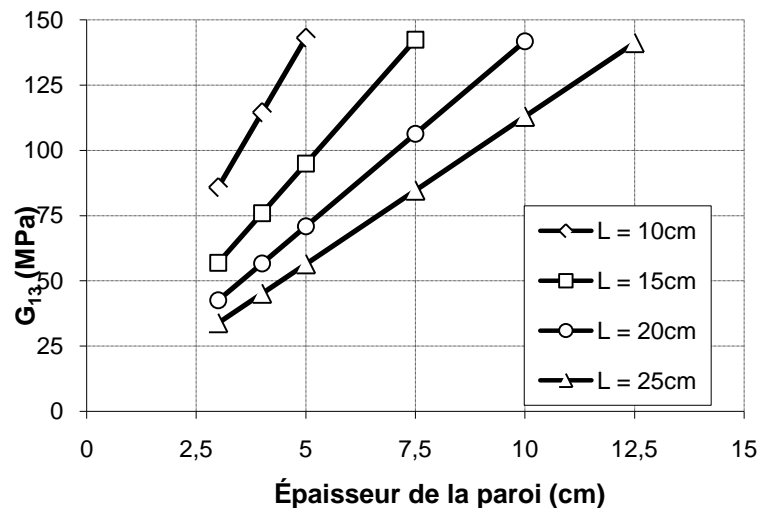


Figure 1.42. *Module de cisaillement en fonction de l'épaisseur de la paroi*

Nous avons remarqué que le module macroscopique de cisaillement du matériau *nid d'abeilles* est proportionnel à l'épaisseur de la paroi, et inversement proportionnel à sa longueur (Figure 1.42)

De plus, le rapport entre les modules d'Young dans le plan et le module de cisaillement hors plan, apparaît quasiment constant et approche la valeur de 12 (Figure 1.43).

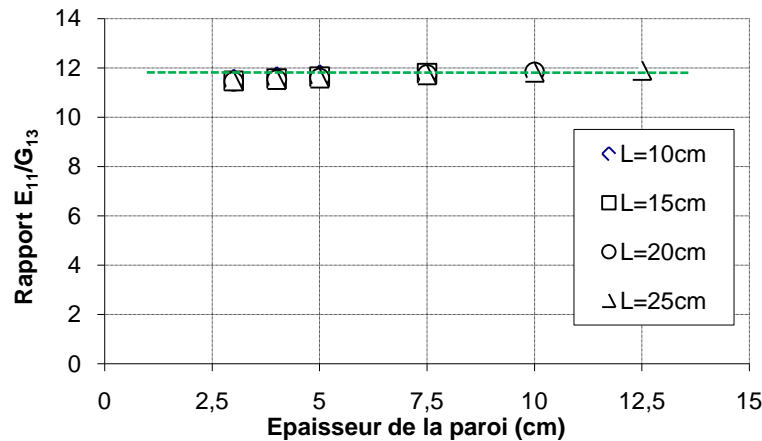


Figure 1.43. Le rapport entre le module d'Young E_{11} et celui de cisaillement G_{13} est considéré constant (L : Longueur de la paroi).

Grâce à ce résultat, on a facilement réalisé des études paramétriques des différents ponts à âme en nid d'abeilles en bois, en fonction du type de bois et de la configuration de la structure nid d'abeilles. Les courbes dans la Figure 1.42 nous permettent de dimensionner la géométrie nécessaire de la structure d'âme pour satisfaire les exigences de l'état limite de service (ELS). L'exemple donné sur la Figure 1.44 résume les conclusions que nous pouvons tirer de ces simulations. Il s'agit d'un pont de 10 m de portée et de 10 m de largeur, supportant le chargement tandem des Eurocodes, soit 2 essieux de 300 kN. La structure est composée d'une couche supérieure en BFUP de 7 cm d'épaisseur (Tableau 1.4), d'une couche inférieure en composite de carbone (CFRP) de 3 mm d'épaisseur, et d'une âme nida en bois dont les épaisseurs et taille de cellule varient. Pour un élanement donné du tablier, la Figure 1.44 nous renseigne sur la valeur minimale que doit prendre le module de cisaillement pour respecter le critère de flèche maximale à l'ELS. En remontant cette information sur la Figure 1.42, nous trouvons les solutions appropriées en termes d'épaisseur de paroi et de dimension de cellule. Par exemple pour $h = 900$ mm (élanement proche du 10^{ème} de la portée), les limites de flèche nous impose un nida possédant un module de cisaillement au minimum égal à 60 MPa, ce qui conduit à différents couples (e , L) : le couple ($e = 5$ cm, $L = 25$ cm) étant une de ces solutions.

Béton BFUP	CFRP
$E_c = 65\text{GPa}$	$E_p = 110$
$\nu_c = 0,2$	$\nu_p = 0,4$

Tableau 1.4. Propriétés du béton et du CFRP

Finalement, ces simulations nous montrent qu'il sera difficile de concevoir des tabliers d'élanement plus important que le 10^{ème} de la portée, car cela conduirait rapidement à des épaisseurs de parois supérieures à 7 cm pour des cellules de longueur 25 cm (exemple de l'élanement 1/14 pour $h = 0,7$ m), ce qui représente un taux de remplissage de l'âme (rapport du volume de bois au volume apparent de l'âme) équivalent à ce que l'on aurait pour une structure à poutres.

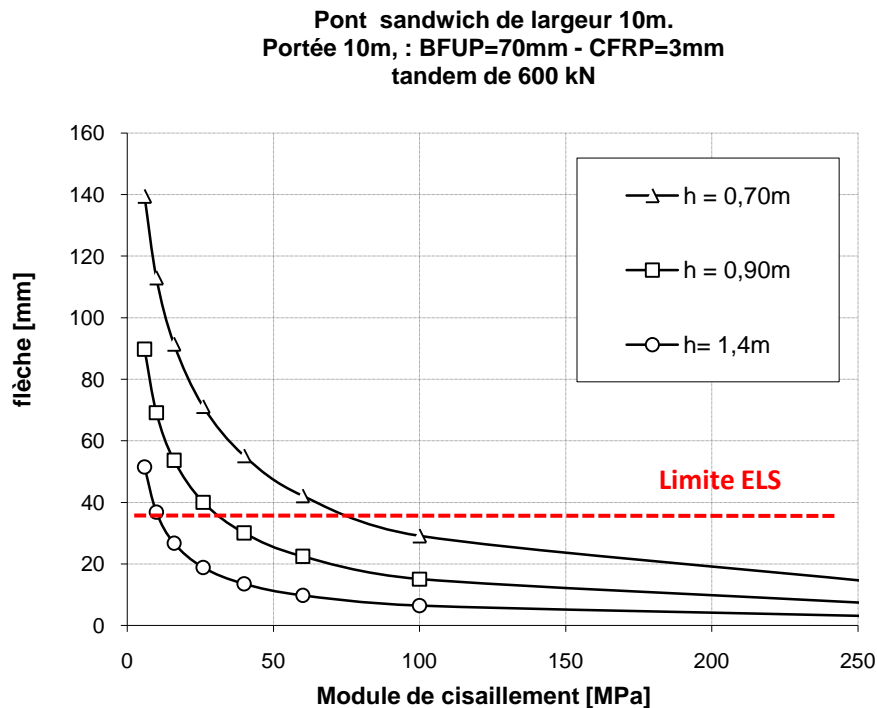


Figure 1.44. Flèche en fonction du module de cisaillement G_{13} (h – épaisseur de l'âme)

Dalles sandwichs à âme pleine en bois – Le bois debout

Une autre idée que nous avons explorée consiste à utiliser des éléments en bois massif, disposés verticalement (bois de bout), pour former une âme d'une dalle sandwich. Le schéma est présenté dans la Figure 1.45.

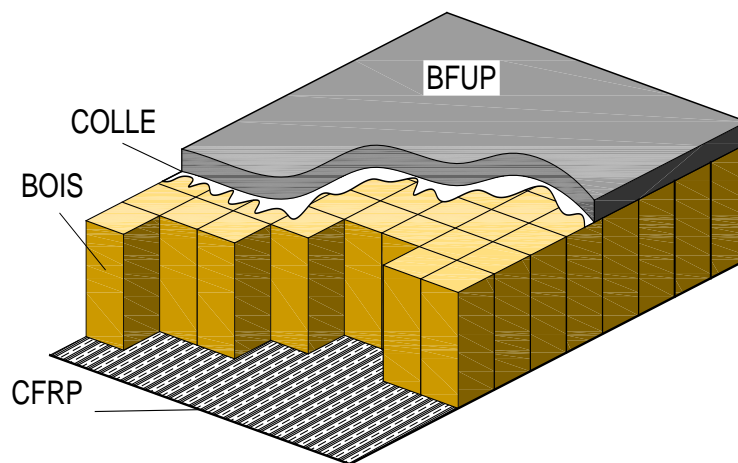


Figure 1.45. Schéma d'un sandwich en « bois debout ».

L'intérêt de cette structure est, d'une part, de profiter des morceaux de bois courts qui sont de grande disponibilité et donc peu chers et, d'autre part, d'empêcher la rupture longitudinale engendrée par le cisaillement et l'arrachement.

Un pont de même dimension que précédemment (10 m de portée pour 10 m de largeur) utilisant le matériau *bois debout parfait* a été modélisé numériquement par ABAQUS. Ce pont supporte le chargement tandem des Eurocodes, soit 2 essieux de 300 kN. La structure est composée d'une couche supérieure en BFUP de 7 cm d'épaisseur solidaire du bois, d'une couche inférieure en

composite de carbone (CFRP) de 1 mm d'épaisseur solidaire du bois, et d'une âme en bois *debout parfait* d'épaisseur de 60 cm.

Les propriétés des matériaux sont dans le Tableau 1.5 :

Béton BFUP	Bois	CFRP
$E_c = 65$	$E_{11} = 0,6; E_{22} = 0,6; E_{33} = 13$	$E_p = 110$
$\nu_c = 0,2$	$G_{12} = 0,6; G_{13} = 0,6; G_{23} = 0,1$	$\nu_p = 0,4$
	$\nu_{12} = 0,4; \nu_{13} = 0,4; \nu_{23} = 0,02$	

Tableau 1.5. *Propriétés des matériaux utilisés, les modules sont en GPa*

Le matériau d'âme, considéré parfaitement homogène, a les propriétés du matériau bois massif, mais la direction longitudinale des fibres est orientée verticalement comme indiqué sur la Figure 1.46.



Figure 1.46. *Convention de la direction matérielle du matériau bois debout. e_l , e_t et e_r sont respectivement les directions longitudinale, transversale et radiale du bois.*

La flèche maximale pour la position centrale du tandem est de 16mm, ce qui montre que la structure a une grande raideur, due principalement à la bonne répartition transversale des charges et au taux maximal de remplissage de l'âme (le bois occupe l'ensemble de la zone d'âme).

Cependant, dans le cas de deux essieux 500kN qui correspond à l'ELU, la contrainte en traction du le bois est de 1,08MPa, qui dépasse la valeur admissible. D'ailleurs, en comparant qualitativement à une solution de poutres existante équivalente, on constate la difficulté de la réalisation de la solution bois debout.

	Bois debout	Poutre
Quantité de bois utilisé	4x	1x
Surface de liaison bois-bois	8x	1x
Surface connexion béton-bois	4x	1x
Rigidité effective en flexion (de la partie bois)	1x	6x
Rigidité effective en cisaillement (de la partie bois)	4x	1x

Tableau 1.6. *Comparaison quantitative entre la solution bois debout avec celle de poutre mixte d'un pont de même portée.*

1.5.2. Poutres sandwichs en bois

Les explorations précédentes nous conduisent alors naturellement vers la solution d'amélioration de structures à poutres hybrides. Elle consiste à reprendre la structure élaborée par Pham [Pham 2007] consistant en une structure mixte composée d'une dalle en BFUP collée sur des poutres en bois, en cherchant à en améliorer le comportement aux ELU, c'est-à-dire vis-à-vis de la rupture. Le projet NR2C s'est intéressé à ce type de structure (Figure 1.47). Des tests (Mekki, Toutlemonde, 2007) sur un élément de tablier de 11 m, pour 10 m de portée et de 2,5 m de largeur, composé de 4 poutres en BLC renforcées par des tissus UD de carbone collés en face inférieure des poutres, et d'une dalle en BFUP, de 7 cm d'épaisseur, liée aux poutres par collage et par des tire fonds (utiles à la fois pour appliquer une pré charge au moment du collage et pour éviter une rupture par cisaillement de l'interface lors de l'essai à rupture).

Bien que la structure NR2C ait été validée du point de vue des chargements EC1 partie pont, la visualisation des ruptures nous amènent à penser que des pistes d'amélioration sont possibles. Nous nous attendions à ce que le renforcement en carbone améliore significativement la résistance du bois en traction, par une uniformisation contraintes, mêmes localement au voisinage des nœuds. Hors, dès qu'une fissure de traction s'est formée, le renforcement n'a pas retardée la propagation de cette fissure (Figure 1.48). Par ailleurs, nous observons qu'une fissure s'est formée à une dizaine de cm de la face inférieure, à une distance telle que le renforcement n'a pas eu d'influence significative (Figure 1.49). Cela signifie que l'efficacité des renforcements du bois par des composites doit être étudiée en profondeur, afin de statuer sur leur réel niveau d'efficacité du point de vue mécanique. Nous faisons en effet ici abstraction des questions de coût, et, pour le moment, de celles liées au bilan environnemental de la structure. Une autre observation de l'essai NR2C est celle de la rupture du BFUP au niveau du joint entre dalles (Figure 1.50). Cette rupture peut provenir de la géométrie du joint, conduisant à de la flexion locale, ou à une faiblesse due à la ségrégation du matériau. Une solution hybride utilisant du BFUP, doit par conséquent être conçue et réalisée en tenant compte de ces faiblesses, ce qui signifie la recherche d'une connexion sans concentration de contrainte et l'obligation d'un contrôle sévère du matériau à la mise en œuvre.



Figure 1.47. *Vue générale du tablier en phase d'essai*



Figure 1.48. *Rupture de la première poutre BLC. Développement de la fissure de traction au niveau d'un nœud et décollement du CFRP. Vue d'un tronçon scié de la poutre.*



Figure 1.49. *Rupture initiale au niveau d'un joint d'aboutage de la seconde poutre en bois*

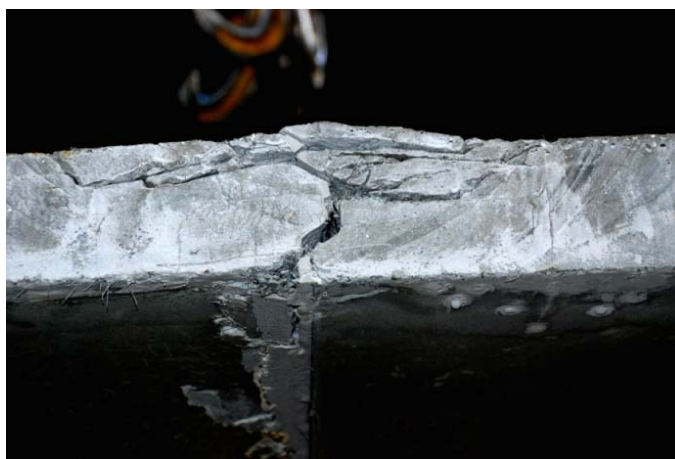


Figure 1.50. *Rupture à la jonction entre dalles de BFUP par concentration de contrainte et ségrégation des fibres.*

1.5.3. Conclusions sur les solutions structurelles à approfondir

Nous avons vu que la recherche de structures de type nida (ou nid d'abeilles) pour les tabliers de ponts rencontre une limite qui est l'obligation de concevoir des éléments peu élancés, et finalement assez peu compatibles avec les exigences du concepteur. La recherche d'un fort élanement a en effet des conséquences positives sur les travaux de terrassement, pour un gabarit donné. De plus, structurellement, il n'est pas forcément nécessaire que les raideurs transversale et longitudinale d'un pont routier soient identiques. L'ingénieur devrait optimiser ces raideurs qui dépendent principalement de la largeur et de la portée. Avec la solution de poutres, cela se réalise plus facilement que dans le cas de dalles en bois de type *nid d'abeilles* ou bois *debout*. En termes de consommation de matériaux, les dalles sandwich exigent plus de colle et de composite, qui sont des composants réputés chers. Dans la mise en œuvre, les dalles à âme en bois doivent être préfabriquées. Or le transport des dalles de grande taille n'est pas toujours facile. A long terme, la réparation et le remplacement des éléments endommagés dans les dalles risquent d'être complexes. D'ailleurs, les endommagements du bois dans le cas de dalles ne sont pas visibles.

Ainsi, la solution de tabliers composés de poutres présente aujourd'hui et selon nous plus d'avantages que celle de dalles sandwich. Premièrement, avec la solution poutres, nous profitons des avantages de la technique *lamellé-collé* déjà optimisée, ce qui nous permet de concentrer nos efforts sur les points singuliers, comme les connexions, en s'appuyant sur un savoir faire existant dans le domaine du bois. Les travaux de Delfino (Delfino, 2005) présentent également les points forts des solutions *multipoutres*.

Nous nous appuyons ensuite sur des travaux récents encourageants, qu'il apparaît nécessaire d'approfondir. L'association, au bois, de béton ultra performant dans la zone de compression est une conception dont Pham a fait la preuve de son efficacité mécanique, même en fatigue. Nous estimons par ailleurs que les résultats obtenus dans le projet NR2C sont suffisamment prometteurs pour être approfondis. Enfin, le problème théorique du renforcement du bois est également dans la lignée des questions explorées au sein du laboratoire Navier sur les multi couches.

Dans nos calculs préliminaires, nous n'avons abordé que les problèmes de flexion, en omettant volontairement la question de la résistance au cisaillement des tabliers de ponts. Or, les efforts tranchants dans les ponts routiers sont souvent importants et peuvent devenir dimensionnants. Comme signalé en début de chapitre, la résistance en cisaillement du bois est faible devant celle d'autres matériaux du génie civil. La question du renforcement en cisaillement doit donc ne pas être oubliée. Plusieurs travaux théoriques et expérimentaux sont trouvés dans la littérature sur ce sujet. Ils seront présentés dans le prochain chapitre.

1.6. Conclusion

L'analyse des différentes typologies de pont en bois et de matériaux nous conduisent à approfondir la conception de tabliers à poutres renforcées, surmontées d'une dalle en béton ultra performant.

Avant d'aller plus loin dans les détails de cette solution, nous allons tout d'abord, dans le chapitre 2, étudier le comportement en flexion des poutres en bois lamellé collé et celles renforcées par composite, d'un point de vue mécanique et statistique. Dans les chapitres 3 et 4, un modèle appliqué aux structures multicouches sera présenté et étudié. A l'aide de ce modèle, les critères de rupture dans le bois et dans la connexion entre le bois et d'autres matériaux (dé laminage) seront également identifiés expérimentalement.

Chapitre 2. Évaluation du renforcement de poutres en bois par matériaux composites

La présence des défauts naturels dans le bois est une source de grandes variations des propriétés mécaniques. Depuis 40 ans, la possibilité de renforcement des poutres en bois lamellé-collé a été étudiée. Dans les premières expérimentations, les matériaux traditionnels, comme l'acier, sont utilisés pour des renforcements locaux (tiges boulonnées, assemblages avec plaques, etc.) [Larsen *et al.* (2000)]. Mais les recherches ont toutes le même objectif : améliorer la capacité du bois pour son application sur structures fortement sollicitées. Toutefois, la baisse de prix des fibres de synthèse telles que celles d'aramide, de verre ou de carbone, a permis d'utiliser les composites à matrice organique (Fiber Reinforced Polymer ou FRP) comme armature de renforcement. En comparant leur propriétés avec celles du métal, les avantages évidents sont la densité plus faible ($\rho_{\text{FRP}} < 0.25\rho_{\text{acier}}$) et la facilité de mise en œuvre.

Actuellement, s'il est nécessaire de maintenir et d'améliorer les anciennes structures en bois, la volonté du ministère de l'écologie de développer des ponts en bois, nous amène à développer également des recherches sur le renforcement pour structures neuves.

Le rôle fréquent des renforcements en FRP, aux propriétés mécaniques élevées, est de fournir des connexions locales au voisinage des défauts, i.e. du confinement vis-à-vis de la rupture locale, et d'arrêter l'ouverture des fissures. En outre, il permet d'utiliser le bois de grade inférieur ou de dimensions plus faibles. Nous proposons de faire une revue de la littérature sur ce sujet.

2.1. Introduction

La présence des défauts naturels dans le bois est une source de grandes variations des propriétés mécaniques. Depuis 40 ans, la possibilité de renforcement des poutres en bois lamellé-collé a été étudiée. Dans les premières expérimentations, les matériaux traditionnels, comme l'acier, sont utilisés pour des renforcements locaux (tiges boulonnées, assemblages avec plaques, etc.) [Larsen *et al.* (2000)]. Mais les recherches ont toutes le même objectif : améliorer la capacité du bois pour son application sur structures fortement sollicitées. Toutefois, la baisse de prix des fibres de synthèse telles que celles d'aramide, de verre ou de carbone, a permis d'utiliser les composites à matrice organique (Fiber Reinforced Polymer ou FRP) comme armature de renforcement. En comparant leur propriétés avec celles du métal, les avantages évidents sont la densité plus faible ($\rho_{FRP} < 0.25\rho_{acier}$) et la facilité de mise en œuvre.

Actuellement, s'il est nécessaire de maintenir et d'améliorer les anciennes structures en bois, la volonté du ministère de l'écologie de développer des ponts en bois, nous amène à développer également des recherches sur le renforcement pour structures neuves.

Le rôle fréquent des renforcements en FRP, aux propriétés mécaniques élevées, est de fournir des connexions locales au voisinage des défauts, i.e. du confinement vis-à-vis de la rupture locale, et d'arrêter l'ouverture des fissures. En outre, il permet d'utiliser le bois de grade inférieur ou de dimensions plus faibles. Nous proposons de faire une revue de la littérature sur ce sujet.

2.2. Revue de la littérature

Intéressons nous aux modes de ruptures de poutres en flexion. Les ruptures en flexion dans les poutres en BLC sont de type fragile. Elles sont en effet souvent localisées aux nœuds, aux défauts ou aux aboutages du côté de la traction. Elles ont donc besoin d'être renforcées de ce côté pour améliorer la résistance en traction. Le renforcement de poutres en BLC avec des couches FRP collées du côté de la tension est très répandu, ce qui se traduit par de nombreuses recherches (John et Lacroix, 2000); (Hernandez *et al.*, 2005) ; (Romani et Blaß, 2000 et 2001); (Fioralli *et al.*, 2003) ; (Borri *et al.*, 2005), etc. L'objectif global de ces études est souvent d'augmenter la rigidité, la résistance en flexion et la ductilité structurale, d'obtenir la rupture en mode de compression.



Figure 2.1. Rupture en traction aux défauts du bois

Quelques configurations typiques de renforcement en flexion sont présentées dans la figure ci-dessous Figure 2.2. Les dimensions (longueur, angle, épaisseur, etc.) de FRP ne sont pas quantitatives.

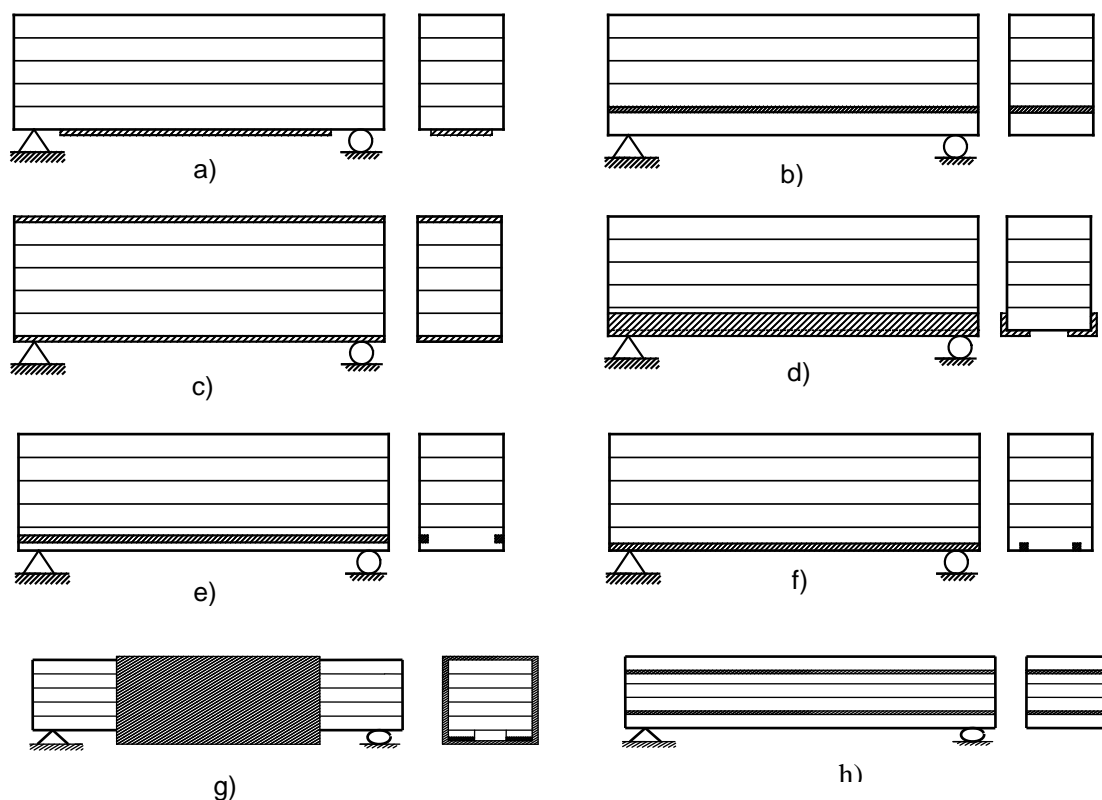


Figure 2.2. Quelques méthodes de renforcement par FRP en flexion de poutres en bois lamellé collé

Les renforcements de type (a)

Le renforcement se réalise par une couche de composite collée sur la dernière lamelle dans le côté de traction.

(J.Fiorelli, A.A Dias, 2003) ont réalisé un renforcement sur de petites éprouvettes par GFRP (glass fiber reinforced polymer) et CFRP (carbon fiber reinforced polymer). Ils ont étudié expérimentalement le comportement en compression du bois pour l'appliquer au comportement élasto plastique en flexion. Ils ont observé des ruptures en compression, puis en traction ou cisaillement. L'augmentation de la résistance et de la rigidité est observée. L'influence des défauts est réduite.

Selon John et Lacroix, la rupture du bois en traction est fragile, aléatoire et difficile à prédire (John et Lacroix, 2000). Ils ont étudié les effets de la longueur des couches CFRP collées sur la face du bois en tension (sur toute la longueur ou sur une seule région). Ils ont indiqué une augmentation de résistance de 40% à 70% par rapport aux poutres non-renforcées. Une distribution plus étroite a également été observée, conduisant à une résistance plus élevée du cinquième centile. Les défaillances survenues en mode de compression indiquent un comportement ductile. Ils ont montré également l'intérêt de la longueur de renforcement ou de pratiquer du renforcement en U.

(Hernandez *et al.*, 1997) a étudié la résistance en flexion et la rigidité de poutres en bois lamellé collé de peuplier, renforcées par GFRP. Trois pourcentages en volume de renfort ont été ajoutés par le collage de deux couches GFRP sur la zone de tension. Les éprouvettes sont de petites tailles. L'auteur signale une augmentation de la résistance et de la rigidité en flexion. Signalons que des ruptures par délaminage des couches GFRP ont été observées.

(Blaß et Romani, 2000, 2001) ont trouvé une augmentation très grande de la résistance en flexion par le CFRP. Cependant, la rupture est toujours observée aux nœuds ou aux aboutages de toutes les éprouvettes dans les zones tendues. Fiorelli [Fiorelli *et al.*, 2003] a renforcé des poutres en Pin caribéen par le collage de FRP sur le côté de tension (GFRP 1% de volume, CFRP 0.4% en

volume). La rupture s'est produite en deux étapes : écrasement des fibres dans la zone comprimée et puis en cisaillement ou en traction. Le résultat donne la rupture ductile avec une augmentation de la raideur de 15% à 30%.

(Borri *et al.*, 2005) a collé des tissus en CFRP (époxy) de différentes densités dans la zone tendue. Certaines poutres ont été renforcées avec une pré-tension du renfort. Une augmentation de la capacité maximale et de la raideur par rapport aux poutres non-renforcées a été respectivement de 22,5% à 29,2% et de 40% à 60%. Les poutres ayant la pré-tension n'ont pas montré d'amélioration significative par rapport à celles non prétendues.

Il est à signaler que le renfort de type (a) a été adopté pour une expérimentation en vraie grandeur menée par le LCPC dans le cadre du WP3 (Figure 2.3), ponts du futur, du projet européen NR2C (New Roads Construction Concepts) (Ben Mekki *et al.*, 2007). Le tablier testé a une portée de 10 m pour une largeur de 2,5 m. 4 poutres en BLC de 60 cm par 24 cm sont renforcées sur leur face inférieure par 12 couches de tissu UD collées à l'époxy et traitées sous vide. La rupture s'est produite en traction du bois. Une délamination du carbone a été également observée. En l'absence de comparaison il est impossible de savoir quantitativement l'apport du seul renfort en carbone.



Figure 2.3. Pont mixte NR2C [Ben Mekki *et al.*, 2007]

Les renforcements de type (b)

Les poutres en bois lamellé collé sont toujours renforcées du côté tendu par des couches de FRP mises invisiblement entre les deux dernières couches de bois pour raisons de sécurité incendie et d'esthétique.

(Dagher *et al.*, 1996) a étudié le renforcement des poutres en pruche de l'Est (Eastern Hemlock / Tsuga canadien). Ce bois a été choisi car l'auteur pensait que le renforcement par FRP est plus efficace pour les bois de faibles propriétés mécaniques. Des poutres en bois lamellé collé de classement faible, médium et élevée sont alors renforcées par FRP en deux proportions en volume (1,1% et 3,1%). L'augmentation de la capacité en flexion a été remarquée dans tous les cas. Mais le taux d'amélioration le plus grand a été observé pour le bois de classe faible. Pour celles de classe supérieure, aucune amélioration significative n'a été obtenue.

(Galloway *et al.*, 1996) ont renforcé des poutres en BLC de pin maritime avec des tissus d'aramide sans ou avec prétension. Ils ont montré que la prétension ne donne pas d'augmentation significative de la résistance en flexion. La plupart des poutres se sont rompues aux nœuds ou aux joints (aboutages) du côté tendu. Le test de cisaillement d'interface bois-aramide montre que l'adhérence diminue lors de l'augmentation de précontrainte.

(Blaß et Romani, 2000 et 2001) ont collé des tissus d'AFRP (Aramide) et CFRP entre les deux dernières couches des poutres en BLC. Comme auparavant (rubrique a.), la plupart des ruptures s'est produite dans le bois, au dessus des couches renforcées, mais aussi en dessous et dans la zone de compression (rupture à la plupart des aboutages).

Les renforcements de type (c)

Les poutres en bois massif ou en BLC sont renforcées par des couches ou des tissus de FRP à la fois en zones comprimées et tendues. D'après Lopez-Anido (Lopez-Anido et Xu, 2002), ce type de renforcement permet d'augmenter la durabilité du bois en fournissant la protection contre l'environnement..

(Hernandez *et al.*, 1997) ont étudié la résistance et la rigidité en flexion des poutres en BLC de peuplier, renforcées par du GFRP avec un taux volumique de 3%. Le résultat sur des petites éprouvettes n'a pas de représentativité statistique significative, mais la résistance et la rigidité augmentent en moyenne. Toutefois, en comparant avec le type de renforcement dans (a.), cette augmentation est plus faible (13% moins). Les poutres testées se sont rompues en traction, et la délamination a été observée.

(Lopez-Anido et Xu, 2002) ont étudié, comme Dagher (Dagher *et al.* 1996), le renforcement des poutres en BLC de Picea de l'Est. Ils ont choisi le GFRP unidirectionnel et des tissus ($\pm 45^\circ$). Le renforcement unidirectionnel a montré une augmentation de la capacité de charge de 47% avec une ductilité significative. Le deuxième renforcement (tissus de $\pm 45^\circ$) n'améliore pas les propriétés en flexion, le mode de rupture est en traction du bois.

(Ogawa, 2000) a travaillé sur le renforcement de poutres de lamellé collé de cèdre japonais et de pin souple (mélèze), avec du CFRP entre 0.08% et 1.3% en volume de bois. Une résine phénolique a été utilisée pour améliorer la capacité en cisaillement interlaminaire bois-carbone et la résistance au feu. La capacité en flexion est grandement augmentée indépendamment du type de bois ou de la quantité de CFRP. Le coefficient de variation de la résistance diminue pour atteindre 6% à 8% comparée à celle de 10% à 25% pour le bois non renforcé.

Les renforcements de type (d)

Le renforcement par FRP se trouve aux angles de la dernière lamelle bois. Ce type de renforcement n'est pas fréquent. Il a été étudié par (Borri *et al.*, 2005) avec du CFRP. Une augmentation de la charge maximale de 55% et de la rigidité de 30.3% a été enregistrée. Le comportement de ce type de renforcement est similaire avec celui (a).

Les renforcements de type (e)

La technique NSM (Near Surface Mounted) a été appliquée sur les deux côtés de la dernière lamelle bois sollicitée en traction. Des rainures sont réalisées dans le bois afin de mettre en place les barres de FRP scellée avec de la résine (époxy).

(Gentile *et al.*, 2002) a étudié les effets de technique NSM sur les poutres en Douglas-fir (Pseudotsuga) de 30ans. Deux barres (de diamètre de 13mm) ont été introduites. Le taux de renfort en volume est de 0.42%. La propriété en flexion a été améliorée jusqu'à 46%. En outre, 60% des poutres se sont cassées en mode de compression. La charge de rupture a été bien prévue.

Les renforcements de type (f)

Le renforcement avec la technique NSM/FRP se trouve sur la face en tension de la poutre. On scelle des barres dans des rainures disposées sur la surface bois en injectant de la résine époxy.

[Borri *et al.*, 2005] a utilisé les barres CFRP de 7,5mm de diamètre avec deux dispositions :

- Une barre au milieu

- Deux barres placées symétriquement.

Dans tous les deux cas, l'augmentation de la charge maximale et de la rigidité est observée (respectivement 28,9% et 22% pour le premier cas, 55% et 25.5% dans le deuxième). La ductilité est plus faible que celle obtenue avec les renforcements type (a) et (d). Par contre, l'aspect esthétique est meilleur en utilisant ce type de renforcement.

(Gentile *et al.* 2002) a étudié les effets de la technique NSM avec les barres en GFRP/Epoxy pour le renforcement des poutres en Douglas-fir. Quatre barres (de diamètres de 13 et 10mm) sont introduites dans la zone en tension. Le taux volumique est respectivement de 0,42% et 0,26%. Le même phénomène que précédemment a été observé.

(Johnson *et al.*, 2005) a étudié de renforcement des poutres en épicéa avec les barres en CFRP (section rectangulaire de 10x10mm²) en utilisant de la résine époxy. Trois dispositions ont été choisies :

- Une barre CFRP disposée au centre de la dernière lamelle
- Deux barres CFRP mises symétriquement par rapport au centre de la dernière lamelle.
- Une barre courte CFRP disposée au centre de la dernière lamelle.

Toutes les poutres renforcées ont montré une augmentation des propriétés en flexion par rapport à la poutre référence. La capacité de charge moyenne est entre 44% et 63%. Le mode de rupture, alors ductile, est dans la partie en compression.

Les renforcements de type (g)

(Buelle *et al.*, 2005) a étudié ce type de renforcement. Ce type consiste à placer la partie CFRP au-dessous de la poutre (du côté de la tension) loin de l'axe neutre afin de maximiser la résistance de flexion. Le passage des couches CFRP a été réalisé sur des tasseaux en bois rapportés. Un autre tissu de carbone a ensuite été enroulé autour de la poutre. Une augmentation de la résistance en flexion de 69% a été obtenue comparativement à la poutre référence. La rupture est alors en mode de compression. Buelle signale une augmentation de rigidité de 18%.

Type de renfort	Augmentation rigidité	Augmentation résistance	Mode de rupture	Observations
(a)	faible ou jusqu'à 30 % selon auteurs	jusqu'à 70 %	Fragile et ductile selon auteurs	Ruptures en Compression traction délamination
(b)	-	Plus sensible pour les bois de résistance faible	Aux nœuds ou aboutages en zones de traction	-
(c)	-	Faible ou jusqu'à 47% selon auteurs. Tissus n'améliore pas la résistance	-	Diminution du coefficient de variation de la résistance
(d)	Augmentation de 30%	Augmentation jusqu'à 55 %	compression	-
(e)	-	Augmentation jusqu'à 46%	compression	-
(f)	-	-	-	Ductilité plus faible que (a) et (d)
(g)	Jusqu'à 18%	Jusqu'à 69%	-	-

Tableau 2.1. Synthèse des conclusions de la littérature sur l'efficacité du renforcement du bois

Les renforcements de type (h) :

Les renforcements sont bien entendu fortement améliorés avec des applications intégrant des lames de carbone entre les lamelles de bois, par exemple le carboglulam®, qui est développé par la société Epsilon Composite, en collaboration avec le CTBA (Figure 2.4). Le principe de conception repose sur des éléments de structure composés de bois lamellé-collé en partie centrale (âme) et d'un complexe bois/carbone sur chaque partie extérieure.



Figure 2.4. *Le Carboglulam® [CBTA, 2003]*

Une campagne d'essais a été menée sur des poutres en grandeur d'emploi en flexion 3 et 4 points. Les poutres, en pin sylvestre ou pin maritime traité CCA (classe 4) avec des lames de carbone de 1 cm d'épaisseur, avaient des dimensions de 15 m x 0,6 m x 0,1 m.

Compte tenu du prix des éléments de carbone pultrudé, le Carboglulam® ne se justifie pas dans toutes les solutions structurales. Son emploi est pertinent sur des projets où de très hauts niveaux de performance sont requis. C'est un peu dans cet esprit que nous avons imaginé nos renforcements, mais avec des quantités de carbone moindre.

De la revue de la littérature sur le renforcement des poutres en BLC, il ressort que les études sont essentiellement expérimentales. La plupart des renforts sont en carbone, mais quelques uns sont en aramide. L'analyse de l'ensemble de ces données ne permet pas de définir un mode de renforcement plus performant qu'un autre. L'augmentation du taux de renfort augmente la rigidité, mais nous n'avons aucune information sur l'effet de cette augmentation sur la résistance. Quelques conclusions générales sont toutefois possibles :

- Le renfort a plus d'effets sur les bois de faible résistance que sur ceux de résistances élevés ;
- Les tissus sont moins performants que les plats UD ;
- Le coefficient de variation de la résistance diminue avec le renfort ;
- Des ruptures se sont déplacées de la traction vers la compression, rendant le processus ductile.

En résumé, l'efficacité du renforcement de FRP dans les poutres bois lamellé collé peut être qualitativement présentée sur la figure [Figure 2.5].

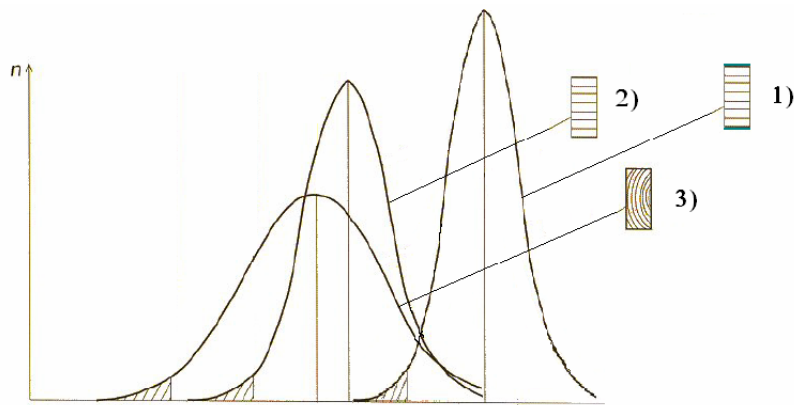


Figure 2.5. *Caractéristiques du bois (3), du bois lamellé collé (2) et du bois lamellé collé renforcé par FRP (1).*

Des questions importantes restent cependant ouvertes. Ainsi, beaucoup d'études sont effectuées sur des éléments de très faibles dimensions, ce qui a pour effet de diminuer la taille caractéristique des défauts. Ceci, en conséquence pourrait modifier les effets positifs du renfort. En d'autres termes, sur des éléments dont le volume élémentaire représentatif est atteint (VER), i.e. des lamelles de 30 à 40 mm d'épaisseur comme rencontré couramment dans le BLC, quel est l'effet quantitatif du renfort en flexion?

Dans un premier temps, cette étude se propose de rechercher un modèle permettant de prédire le comportement ultime du bois renforcé ou non en flexion. Ce modèle dans un second temps est confronté à des expérimentations sur différents bois. Nous tenterons ensuite à partir d'expérimentations sur des éléments en bois renforcés d'extraire des premières conclusions pour guider la suite de l'étude.

2.3. Première analyse mécanique du renforcement

En raison du comportement élastique linéaire fragile du bois en traction, il est classique d'utiliser le modèle linéaire de Timoshenko pour le calcul des éléments bois. C'est ce modèle qui va être utilisée dans la première partie. La non-linéarité du bois en compression sera introduite dans la seconde partie. Dans le chapitre 3 sera proposé un modèle plus complexe permettant de mieux prendre en compte les efforts aux interfaces.

2.3.1. Analyse linéaire

L'analyse linéaire est basée sur les hypothèses de Timoshenko pour laquelle la méthode de section équivalente est applicable. L'hypothèse la plus remarquable est celle des sections qui restent droites.

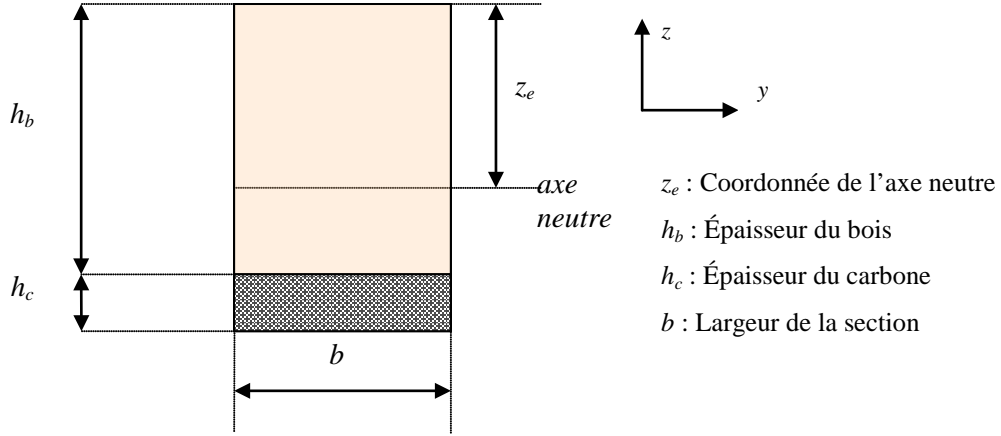


Figure 2.6. Section renforcée

Soit une section rectangulaire renforcée (Figure 2.6), nous déterminons classiquement la position de l'axe neutre :

$$z_e = \frac{\int_{\text{section}} E_i z ds}{\int_{\text{section}} E_i ds} = \frac{E_b z_b h_b + E_c z_c h_c}{E_b h_b + E_c h_c} \quad (2.1)$$

Rigidité en flexion :

$$(EI)_{eq} = E_b (I_b + A_b (z_b - z_e)^2) + E_c (I_c + A_c (z_c - z_e)^2) \quad (2.2)$$

où E_α , I_α , A_α , z_α sont respectivement module d'Young, le moment d'inertie, l'aire et la coordonnée verticale du centre de gravité de la section s'occupant le matériau α . ($\alpha=b$ pour le bois et $\alpha=c$ pour le composite).

La contrainte normale dans les bois est :

$$\sigma_{11}(x, z) = \frac{E_b M(x)}{(EI)_{eq}} z \quad (2.3)$$

et la contrainte en cisaillement :

$$\tau_{13}(x, z) = \frac{V(x) \cdot S(z) \cdot E_b}{b \cdot (EI)_{eq}} \quad (2.4)$$

La flèche maximale de la poutre en flexion 3 points sous charge P :

$$v = \frac{P \cdot l^3}{48(EI)_{eq}} \quad (2.5)$$

Où $M(x)$, $S(z)$, z , $V(x)$, b sont respectivement le moment fléchissant, le moment statique de la section, le bras de levier (position de la fibre par rapport à l'axe neutre) et l'effort tranchant.

L'analyse linéaire ne peut pas être appliquée au calcul de la capacité ultime des éléments bois à cause du comportement plastique/endommagé dans la zone de compression (Figure 2.7). L'existence d'un renfort rend encore plus important le recours à l'analyse non-linéaire.

2.3.2. Analyse bi-linéaire

Ainsi au moment de la rupture en traction, le bois en compression est souvent plastifié localement. De plus, le renfort en traction favorise la rupture dans la zone comprimée. Il est donc intéressant de disposer d'un modèle avec plasticité pour calculer les sections fléchies de bois ou de bois renforcé. Un tel modèle a été développé par [Buchanan, 2000]. Nous l'adaptions ici au bois renforcé en traction.

La (Figure 2.7) ci dessous donne la géométrie et les paramètres du problème. Notons h_{bois} , e , h_c , h_t , h_p , qui sont respectivement l'épaisseur du bois et du composite, l'épaisseur du bois en compression et en traction, et l'épaisseur du bois plastifié. σ_c , ε_c , σ_t , ε_t sont la contrainte et la déformation en compression (indice c) et en traction (indice t). n est le rapport entre les modules d'Young du composite et du bois, se calcule par :

$$n = \frac{E_{cfrrp}}{E_b} \quad (2.6)$$

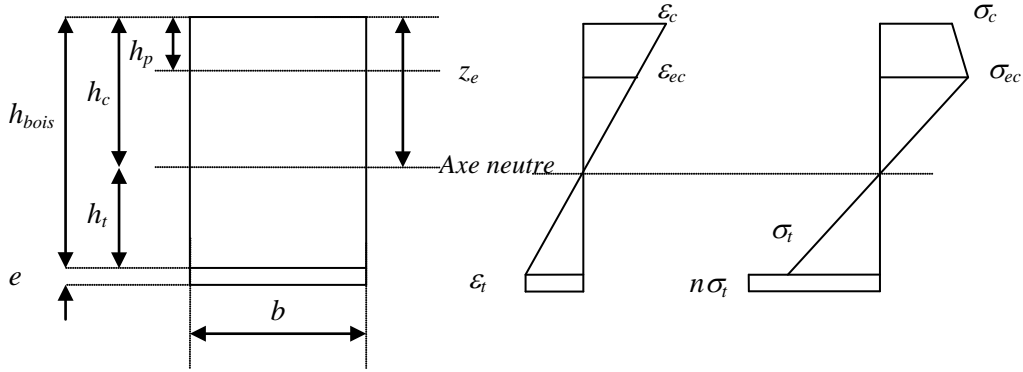


Figure 2.7. Schéma de calcul non-linéaire.

La relation contrainte-déformation du bois est traduite par la loi de Buchanan. Cette loi est caractérisée par un comportement élasto-plastique en compression et élastique fragile en traction, où m est la pente de la branche plastique. (Figure 2.8 et Figure 2.2)

$$m = \frac{\sigma_{uc} - \sigma_{ec}}{E_b(\varepsilon_{uc} - \varepsilon_{ec})} \quad (2.7)$$

Avec σ_{uc} , σ_{ec} , ε_{uc} , ε_{ec} respectivement la contrainte ultime et la limite élastique, la déformation ultime et celle de la limite élastique. E_b est le module d'Young du bois, supposé constant.

Ces paramètres du modèle (ε_{uc} , ε_t , σ_{uc} , σ_{ec}) doivent être déterminés expérimentalement ce qui est très important pour la précision de l'analyse limite du comportement en flexion des poutres bois-CFRP. Considérant que la rupture n'est jamais atteinte dans le composite, le modèle couvre deux cas possibles de rupture, soit en compression lors de l'atteinte de la déformation ultime en compression, soit en traction pour la même raison.

L'hypothèse de conservation de la planéité de la section (Timoshenko et pas de glissement entre les fibres sur la section étudiée) est confirmée par des essais, nous donne en considérant que l'épaisseur de CFRP est mince devant l'épaisseur totale de section (déformation homogène du carbone) :

$$\frac{\varepsilon_c}{h_c} = \frac{\varepsilon_t}{h_t} = \frac{\varepsilon_{ec}}{h_c - h_p} \quad (2.8)$$

Avec le mode de rupture connu, la position de l'axe neutre, la hauteur de la zone plastifiée et le moment fléchissant à la rupture peuvent être déterminés.

En particulier, la loi de Buchanan peut être exprimée par :

$$\begin{cases} \sigma_c = E_b \cdot \varepsilon_c & \text{si } \varepsilon_c < \varepsilon_{ec} \\ \sigma_c = \sigma_{uc} - m \cdot E_b \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_{uc}) & \text{si } \varepsilon_c > \varepsilon_{ec} \\ \sigma_t = E_b \cdot \varepsilon_t & \text{contrainte traction dans le bois} \end{cases} \quad (2.9)$$

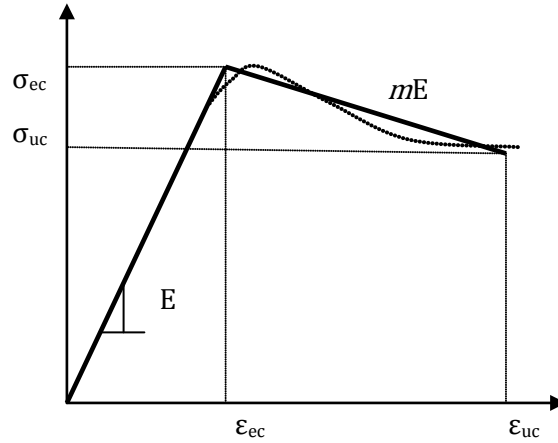


Figure 2.8. Comportement bi linéarisé du bois en compression [Buchanan, 2000]

L'équation (2.9) peut être modifiée si l'on souhaite tenir compte d'une éventuelle différence entre les modules du bois en compression et en traction. Dans la pratique cette différence est négligeable.

La contrainte en traction, supposée homogène, dans le composite est calculée par :

$$\sigma_{cfrp} = E_{cfrp} \cdot \varepsilon_t = n \cdot \sigma_t \quad (2.10)$$

où n est le coefficient d'équivalence

L'équilibre des forces donne :

$$(\sigma_c + \sigma_{ec})h_p + \sigma_{ec}(h_c - h_p) + h_t\sigma_t + 2n\sigma_t e = 0 \quad (2.11)$$

Lorsque la distribution de contrainte sur la section est déterminée, le moment fléchissant se calcule par :

$$\begin{aligned} M = & -\sigma_c h_p \left(h_c - \frac{h_p}{2} \right) - (\sigma_{ec} - \sigma_c) \frac{h_p}{2} \left(h_c - \frac{2}{3} h_p \right) - \sigma_{ec} \frac{(h_c - h_p)^2}{3} \\ & + \sigma_t \frac{h_t^2}{3} + n \cdot e \cdot \sigma_t \left(h_t + \frac{e}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Comme expliqué dans le paragraphe ci-dessus, en supposant la résistance du FRP infinie, il y a 2 possibilités de rupture. La première est en compression lors de l'atteinte de la limite de déformation plastique ultime, tandis que la deuxième est pour la limite en traction du bois. Un troisième mécanisme est toutefois observé lorsque la limite en cisaillement aux extrémités de la poutre est atteinte. En effet, même si les contraintes de cisaillement sont quasi nulles en zone courante à l'interface bois-carbone, les effets de bords aux appuis génèrent aux extrémités du cisaillement

facilitant le délaminage. Ce phénomène est modélisable par des approches plus complexes. Ce sera l'objet du chapitre 3.

Résolution pour une rupture en compression

La rupture en compression a lieu lorsque la plastification de la zone comprimée apparaît, c'est-à-dire lorsque ($\varepsilon_c = \varepsilon_{uc}$). La résolution des équations (2.6) à (2.12) nous donne la position de l'axe neutre, la hauteur plastique de zone comprimée et la contrainte en traction au moment de la rupture.

Résolution pour une rupture en traction

La rupture en traction du bois se produit lorsque la limite de déformation en traction ε_{ut} est atteinte. En remplaçant ε_t par ε_{ut} et σ_t par σ_{ut} dans les équations ci-dessus, on obtient la position de l'axe neutre, le moment maxi et la valeur maximale de σ_c .

Application du modèle pour prévoir la rupture du bois seul en flexion

Afin de statuer sur l'intérêt du renforcement en traction, la première vérification à faire est de prévoir le mode de rupture du bois seul, en flexion, à partir du modèle précédent. Il apparaît intéressant également de savoir pour quelles essences de bois le renforcement est potentiellement intéressant. Cela suppose la connaissance des grandeurs ε_{ec} ; σ_{uc} ; σ_{ut} ; ε_{uc} ; ε_{ec} ; E_b , ou, si l'une des déformations n'est pas connue, le coefficient m défini précédemment. On trouve dans la littérature un ensemble de données comprenant, au minimum, la valeur des 3 contraintes ci-dessus, du module d'Young, et de la déformation ultime. Il nous a alors fallu fixer une valeur du coefficient m à partir des données complètes disponibles [Buchanan, 2000]. La valeur de m a été fixée à 0 ($\sigma_{uc} = \sigma_{ec}$) dans nos calculs. Pour compléter le calcul, nous avons fait varier ε_{uc} et ε_{ut} dans une fourchette correspondant à un coefficient de variation de 15%. Les résultats du calcul sont sur la Figure 2.9. Un point sur la figure est le résultat du calcul de la charge à rupture calculée avec le modèle élasto-plastique dans un essai de flexion 3 points pour les 2 mécanismes de rupture du bois, à savoir rupture en traction (abscisse) ou rupture en compression (ordonnée). On voit que plusieurs points sont sur une même verticale ou horizontale. Nous avons fait varier les propriétés du bois autour de la moyenne pour certains points se trouvant à proximité de la bissectrice. Le résultat est que nous observons que la plupart des essences de bois se rompent en traction lors d'un essai de flexion (pour des cisaillements faibles). Cette première conclusion justifie donc l'intérêt du renforcement du bois en traction.

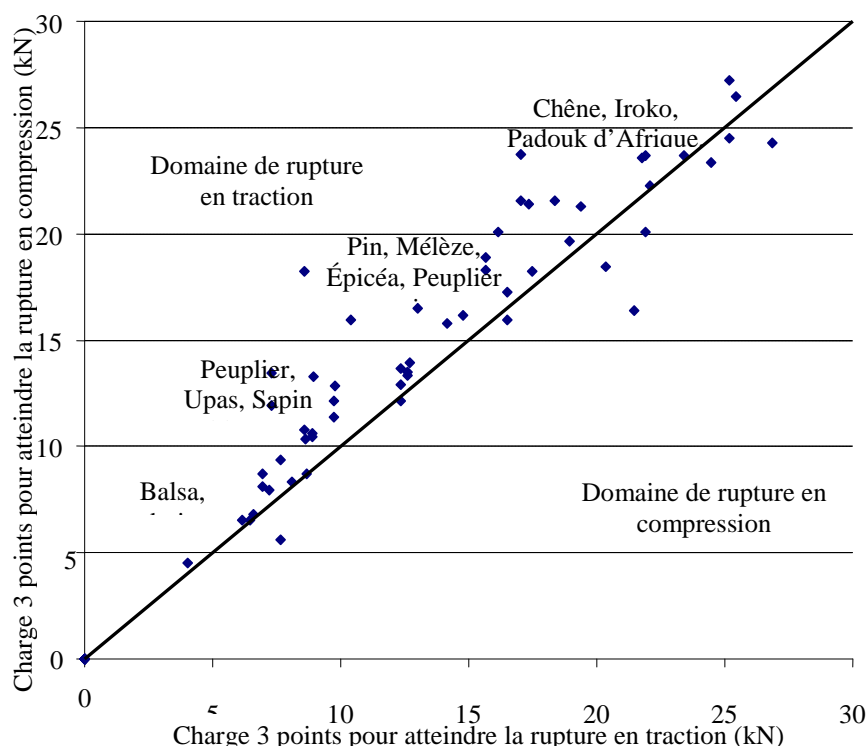


Figure 2.9. *Simulation de la rupture des poutres en bois seul de différentes essences. Section 100x50 (mm²). Portée 1600 mm*

Quelques remarques peuvent être d'ores et déjà faites concernant la possibilité d'optimiser le renforcement. Tout d'abord, nous remarquons que la position de l'axe neutre dans une poutre en bois renforcée descend lors de l'augmentation du module ou de la quantité de FRP, ce qui augmente la déformation en compression et facilite la rupture potentielle dans cette zone. Il est par conséquent théoriquement possible de déterminer la fraction optimale de FRP pour que la rupture ait lieu selon les deux modes en même temps. Ensuite, il est facile d'observer que la performance du FRP est liée à la ductilité du bois. En effet, quand le bois présente une capacité élevée de plastification, sous l'effet du chargement croissant, la position de l'axe neutre descend et la force générée par le FRP tend à augmenter le moment ultime. Si, au contraire, le domaine plastique du bois n'est pas significatif, l'application du FRP ne sera pas aussi efficace. Enfin, la rupture analysée par ce schéma ne tient pas compte des défauts et de l'anisotropie du bois. Une approche statistique apparaît nécessaire pour améliorer la précision du dimensionnement du renforcement des éléments bois par FRP.

Pour approfondir ce sujet, il apparaît important d'étudier expérimentalement le domaine d'intérêt du renforcement du bois en flexion et d'obtenir un jeu de données suffisant pour analyser du point de vue statistique les résultats.

2.4. Expérimentation

Nous présentons maintenant les études expérimentales qui doivent permettre de trouver les domaines d'efficacité du renforcement du bois en traction. Les tests sur les poutres de bois non renforcées montrent que la plupart des ruptures se déroulent en mode de traction du bois, sans ou avec la zone comprimée plastifiée. Quelques essais de compression sont réalisés afin d'ajuster le modèle élasto-plastique. Étant donné la variation des propriétés du bois, les valeurs numériques du modèle

seront calées à chaque essai de flexion.

2.4.1. Dimensions des éprouvettes et propriétés des matériaux

Trente poutres ont été testées, parmi lesquelles 15 sont renforcées par une couche de composite en carbone UD pré-imprégné, de module d'Young de 130GPa , de type aéronautique, d'épaisseur $0,5\text{mm}$, collée sur la face inférieure à l'aide d'une colle époxy de type Sikadur 330, les 15 autres étant non renforcées. Les essais sont de type flexion trois points. Les trente poutres sont en bois massif d'épicéa de $1,7\text{ m}$ de longueur et $0,05 \times 0,1\text{ m}^2$ de section. La portée est de $1,60\text{ m}$ (Figure 2.10).

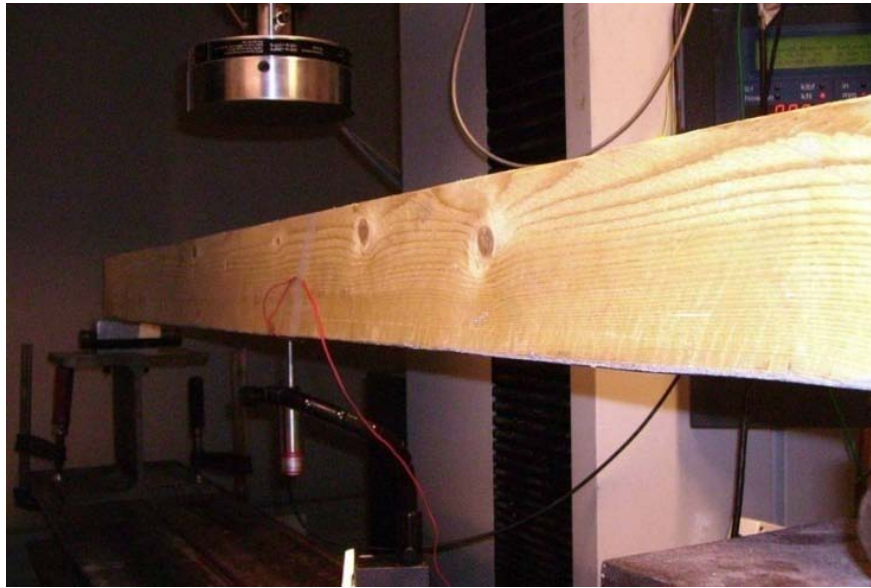


Figure 2.10. *Dispositif pour les essais en flexion 3 points.*

Les propriétés du bois sans défaut et du carbone sont mesurées avant essai. Les propriétés de la colle Sikadur 330 sont prises directement dans le guide du fabricant [Sika 2009, Notice Technique 9.97]. Le taux volumique de renforcement $\frac{V_{\text{carbone}}}{V_{\text{épreuve}}}$ pour les éprouvettes renforcées est de $0,5\%$.

2.4.2. Métrologie et procédure d'essai

Les essais en flexion ont été réalisés à l'Institut Navier, sur une machine d'essai électromécanique MTS 20/M d'une capacité de 100 kN . Les essais ont été pilotés en déplacement à l'aide du logiciel Autotrac à une vitesse de chargement de 1mm/min et 3mm/min pendant le déchargement. Le pilotage de l'essai est composé de trois phases principales (Figure 2.11). La première phase consiste en trois cycles de charge-décharge de 10% à 40% de la charge de rupture F_{Rup} (valeur déterminée par le pré-dimensionnement de la poutre). Elle permet de déterminer la raideur de la poutre. La deuxième phase est composée de trois cycles de charge-décharge allant de 10% à 70% de la charge de rupture. Cette phase permet de déterminer le comportement des poutres dans le domaine plastique et aussi la réversibilité. La dernière phase conduit la poutre à la rupture. Elle permet de déterminer le mode et la valeur de rupture (MOR).

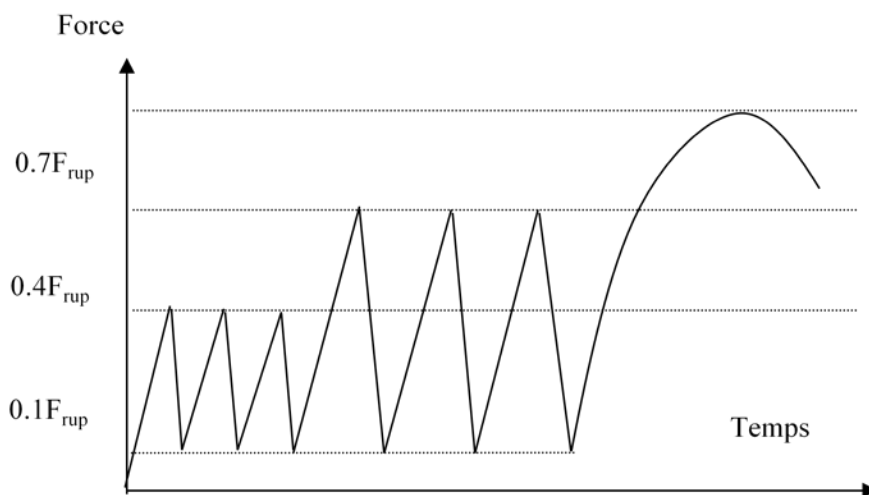


Figure 2.11. *Le plan de chargement / déchargement*

Trois capteurs de déplacement LVDT de 20 mm de course sont disposés pour mesurer la flèche et le tassement d'appui. Une jauge de déformation est disposée à mi-travée, permettant de déterminer la déformation puis l'effort dans le composite (Figure 2.10).

2.4.3. Résultats des essais

Méthode d'exploitation des résultats

La théorie statistique de la rupture fragile d'un matériau hétérogène a été proposée par Weibull [Weibull, 1951]. Elle nous semble adaptée au bois du fait du caractère fragile de la rupture en traction de ce matériau. Nous utilisons ici celle à deux paramètres pour le traitement des résultats de nos essais. La fonction de probabilité $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$ suit une loi exponentielle de la forme:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\phi}\right)^k\right) \quad (2.13)$$

La valeur de la variable X pour le $a^{ème}$ centile se calcule par :

$$[X]_a = \phi. \left(\ln \frac{1}{1-a} \right)^{\frac{1}{k}} \quad (2.14)$$

Le but de ces essais est de calculer les déformations ultimes et la contrainte de traction dans le bois au moment de la rupture, à partir de l'analyse de la courbe effort-flèche par le modèle de Buchanan. La comparaison de ces grandeurs pour les 2 familles d'éprouvettes nous renseignera sur l'apport du renfort du point de vue quantitatif. La courbe expérimentale nous informe sur les efforts correspondant à la limite élastique du bois et la limite ultime de la poutre (Figure 2.15 et Figure 2.16). Pour chaque courbe, le domaine élastique est déterminé objectivement en maximisant la corrélation entre les données de force et celles de déplacement. La force maximale correspond à la force ultime car la partie plastique de courbe est croissante. Nous pouvons donc déterminer grâce aux courbes force-flèche la contrainte σ_{ec} et le moment ultime. Le coefficient m est identifié grâce aux résultats expérimentaux. Sur la 0, on voit qu'il y a au moins 3 méthodes pour fixer la courbe modèle en compression du bois. Nous avons arbitrairement choisi le modèle avec $m = 0$. En l'introduisant dans les équations (2.6) à (2.12), les paramètres $\sigma_t; \varepsilon_c; h_p; h_c; h_t$ au moment de la rupture sont déterminés. Cette valeur $m=0$ sera justifiée après analyse des résultats.

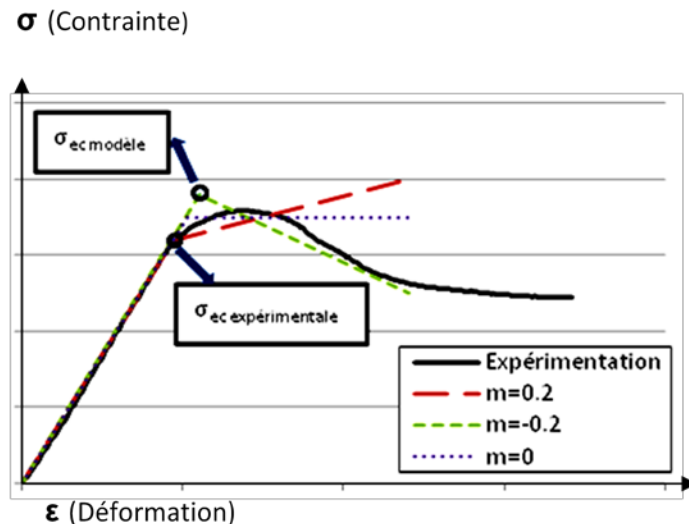


Figure 2.12. *Comportement typique de bois en compression*

Modes de rupture des poutres – examen des courbes obtenues

Les courbes de flexion (Figure 2.15 et Figure 2.16) représentant le comportement des poutres respectivement non renforcées et renforcées montrent toutes un domaine non linéaire avant l'atteinte de la force maximum, témoignant ainsi que la plastification du bois a eu lieu en compression. Certains auteurs estiment que le début de la plastification du bois correspond à la rupture. Ici, nous définissons la rupture comme la force maximale obtenue dans l'essai. Cette définition est proche de celle adoptée pour le béton armé, pour lequel on autorise la plastification du béton en compression dans le calcul des sollicitations ultimes.

Les observations permettent de distinguer deux modes de ruptures principaux des poutres. Tout d'abord, aucune rupture en traction du carbone n'a été observée. Le premier mode de rupture est en traction du bois. Ce mode a eu lieu pour toutes les 15 poutres non renforcées et pour quelques poutres renforcées. Cette rupture, brutale et fragile, s'initie au niveau des défauts du bois (nœuds, fissures...). Un exemple est dans la Figure 2.13 et Figure 2.14

Le deuxième mode de rupture se développe par plastification du bois en compression. Pour ce mode, la rupture se conclut en général par le décollement du carbone à l'extrémité de la poutre.

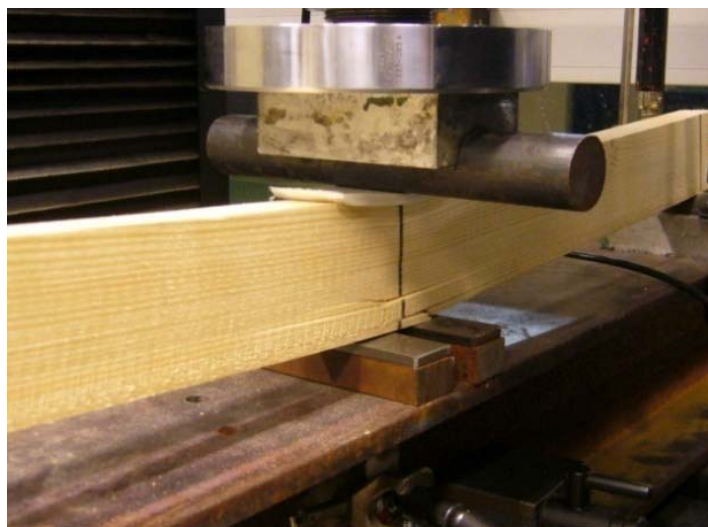


Figure 2.13. *Poutre non renforcée. Rupture en traction.*



Figure 2.14. *Poutre renforcée. Rupture en traction.*

La Figure 2.15 et Figure 2.16 montrent l'ensemble des courbes expérimentales obtenues sur les 30 poutres, le Tableau 2.2 récapitule les résultats. Les observations suivantes peuvent être faites :

- En présence de renforcement, le comportement est plus ductile. La flèche maximale est en moyenne plus importante. Une flèche maximale de 65 mm a été observée ;
- La raideur en flexion des poutres augmente conformément aux prévisions de la RdM. Le taux de renfort de 0,5% augmente la raideur en flexion de 16%.
- La moyenne des forces de rupture est augmentée en présence de renfort. La moyenne des charges ultimes est augmentée de près de 23% en présence du renforcement. Cependant les valeurs maximales sont quasiment identiques.
- Les contraintes maximales de traction dans le bois sont peu changées en présence de renforcement (Tableau 2.2). Nous constatons une augmentation moyenne de 7 % de la résistance théorique du bois pour les poutres renforcées.
- Le gain très visible concerne la réduction de la dispersion des résistances. Le coefficient de variation de la force maximale chute de 25% à 13% avec le renforcement.

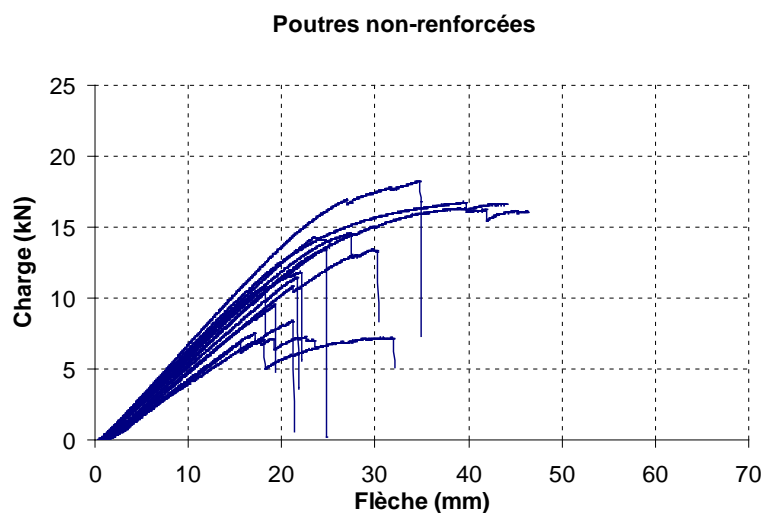


Figure 2.15. *Comportement en flexion pour les poutres non renforcées*

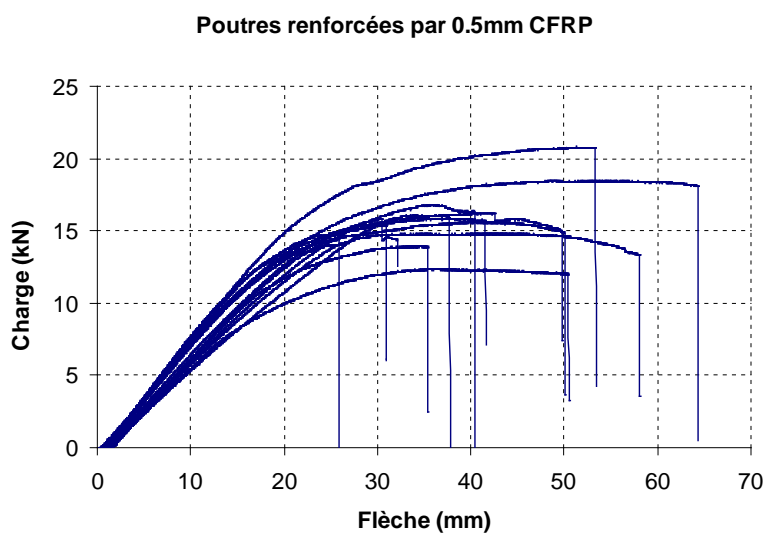


Figure 2.16. *Comportement en flexion pour les poutres renforcées.*

Poutres	Raideur en flexion (N/mm)		Capacité maximale (kN)		Contrainte max dans le bois en traction (MPa)		Flèche résiduelle (mm)	
	Moyenne	Coef. de variation	Moyenne	Coef. de variation	Moyenne	Coef. de variation	Moyenne	Coef. de variation
Avec renfort	691,02	9,8%	15,8	13,6%	83,9	14,4%	27,16	47%
Sans renfort	593,9	13,9%	12,8	24,8%	78,4	24%	6,08	72%
Gain (%)	16.35		23.44					

Tableau 2.2. *Récapitulatif des résultats d'essai. La contrainte maximale a été calculée par le modèle (équations 2.6 à 2.12) avec $m = 0$.*

Analyse plus détaillée des résultats

Nous allons dans cette partie comparer statistiquement quelques paramètres pour évaluer les domaines d'intérêt du renforcement. Ces paramètres sont donnés dans les Tableau 2.3 à Tableau 2.7.

Pour chaque comparaison, nous comparons le facteur de forme k et le facteur d'échelle ϕ de la loi Weibull. La valeur du cinquième centile sera également calculée et comparée. En effet, les normes de calcul des structures, et en particulier les Eurocodes, introduisent la notion de résistance caractéristique, laquelle représente le cinquième centile de la distribution. Les paramètres les plus intéressants sont la raideur en flexion, capacité maximale, ductilité (flèche résiduelle). Néanmoins, les autres paramètres, tels que la résistance en traction du bois, l'épaisseur du bois plastifié, sont également estimés.

Comparaison des raideurs en flexion trois points

Nous nous intéressons maintenant à la première phase qui est composée de trois cycles de chargement et déchargement. Dans cette phase, le rapport entre l'effort appliqué et la flèche correspondante est *quasi* linéaire. Il est déterminé en moyennant les deux derniers cycles de chargements dans la première phase de pilotage. Ce rapport s'appelant raideur en flexion simple (Figure 2.17) permet également de déterminer le module apparent du bois en flexion.

Nous observons un faible décalage de 16,4% entre les 2 populations d'éprouvettes. L'augmentation obtenue en présence de carbone correspond au 0,5% en volume de renfort. Ceci était prévisible car, nous nous intéressons spécialement au domaine des faibles taux de renforcement du bois. On peut noter également que la valeur de la raideur pour le cinquième centile augmente, quant à elle, de 28% (Tableau 2.3). Ceci est plus élevée que 16,4% (valeur moyennée).

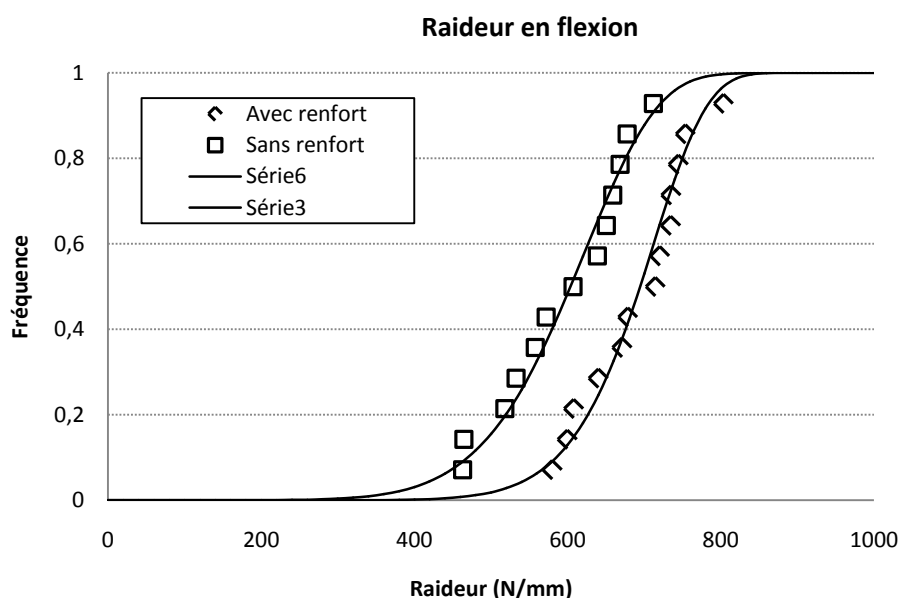


Figure 2.17. Comparaison des raideurs en flexion trois points

Paramètres Weibull	k	ϕ	$[X]_{5\%}$ (N/mm)
Poutres sans renfort	7,5	634	426,7
Poutres avec renfort	11	718	548,1

Tableau 2.3. Paramètres Weibull pour la raideur en flexion

Charge maximale et Module de Rupture (MOR)

Une première analyse un peu grossière consiste à comparer les modules de rupture des 2 populations. Par module de rupture des éléments bois, on entend la résistance maximale observée dans le bois avant la rupture totale en faisant l'hypothèse que le comportement de la poutre est élastique linéaire.

$$MOR = P \frac{l}{4} \cdot \frac{z}{I_{eq}} \quad (2.15)$$

où l la portée de la poutre

z le bras de levier maximal

I_{eq} l'inertie de la section en flexion.

P la charge maximale observée avant la rupture.

Cette définition est fréquemment utilisée dans l'ingénierie du bois comme un critère pour prédire la rupture. La valeur du module de rupture est égale à la résistance en traction ou compression maximale. Les résultats sont sur la Figure 2.18 et Tableau 2.4.

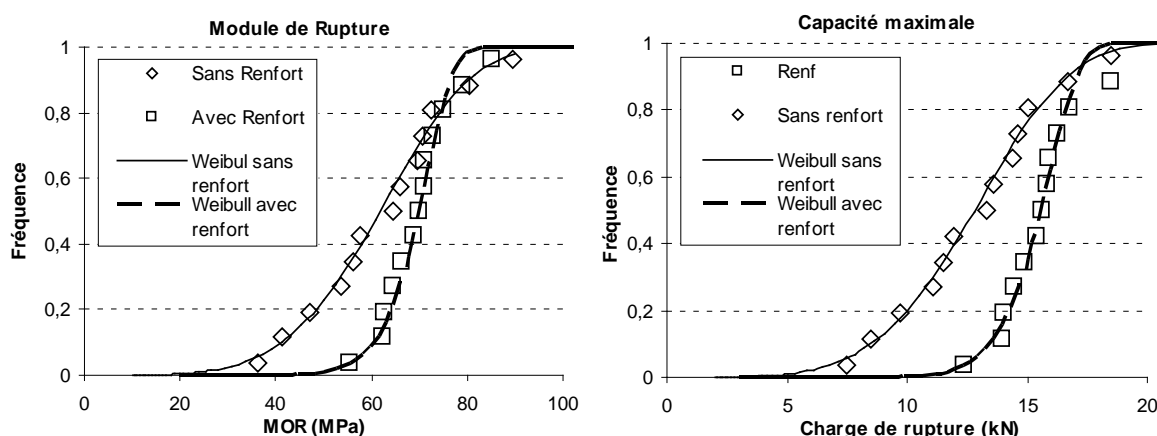


Figure 2.18. Module de rupture et capacité maximale des poutres en flexion trois points

Rappelons que nous utilisons dans cette étude la distribution de Weibull à deux paramètres, c'est-à-dire, nous acceptons que la valeur minimale des variables soit possiblement égale à 0. Ce n'est pas la meilleure approche mais elle nous permet plus facilement d'évaluer le renforcement. Pour les poutres renforcées, le facteur d'échelle augmente légèrement, tandis que le facteur de forme augmente énormément, ce qui fait presque doubler la valeur de cinquième pourcentile.

Paramètres Weibull	k	ϕ	$[X]_{5\%}(N)$
Poutres sans renfort	4	14050	6686,4
Poutres avec renfort	12,5	16115	12706,8

Tableau 2.4. Paramètres statistiques de la distribution Weibull de la capacité maximale

Les valeurs moyennes des charges ultimes sont respectivement de 12,8kN et 15,8kN, c'est-à-dire peu différentes (23,4%). Les valeurs de k nous permettent de vérifier ici quantitativement que la distribution des résistances est bien plus serrée en présence du renforcement. Les poutres ayant défauts graves sont améliorées. Le rôle du renforcement est donc de lisser les défauts locaux du bois, autrement dit, de limiter les effets des concentrations de contrainte aux singularités en empêchant la

propagation des fissures. De plus, on voit dans le Tableau 2.4 et sur la forme de la courbe dans la Figure 2.18, que la valeur de la capacité pour le cinquième centile est augmentée 90%. Ceci est bien évidemment extrêmement intéressant pour le dimensionnement des poutres.

Contrainte maximale en traction dans le bois

Nous acceptons l'hypothèse que l'interface carbone – bois est parfaite et que l'épaisseur de carbone est négligeable devant celle du bois. Des jauges ont été collées sur la face inférieure de 2 poutres renforcées. Nous avons aussi déterminé la contrainte en traction et la déformation grâce au modèle non linéaire présenté au dessus. La comparaison des déformations expérimentales et théoriques au moment de la rupture sont donnés dans le Tableau 2.5. On observe les différences de 8% et 17% attribuable à la simplicité du modèle et à l'imprécision sur la mesure du module (le module local est ici calculé à partir de la courbe de flexion et du module apparent en supposant que le module de cisaillement est égal à $1/20^{\text{ème}}$ du module apparent).

Poutres renforcées	Force maximale (kN)	Déformation mesurée	Déformation calculée (modèle bilinéaire)
26	18,49	0.0090	0.0077
27	20,82	0.0081	0.0075

Tableau 2.5. Comparaison des déformations pour 2 corps d'épreuve

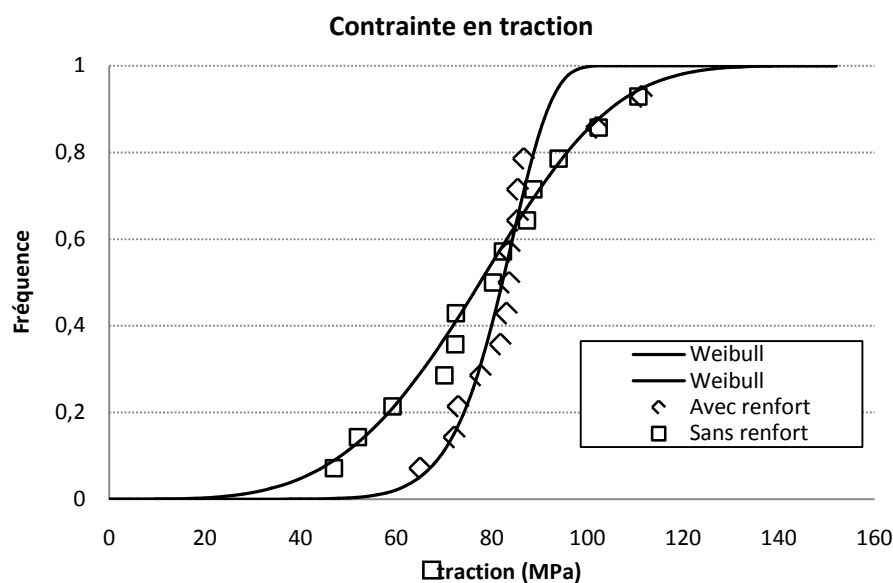


Figure 2.19. Contrainte maximale en traction du bois au moment de rupture

Paramètres Weibull	k	ϕ	$[X]_{5\%}(MPa)$
Poutres sans renfort	4	85	40,45
Poutres avec renfort	11	85	64,88

Tableau 2.6. Paramètres statistiques de la distribution Weibull de la contrainte maximale en traction dans le bois.

On voit la Figure 2.19, La moyenne des contraintes ultimes en traction dans le bois renforcé augmente de $5,5\text{MPa}$ soit un pourcentage de 7,06%. Les paramètres d'échelle ϕ dans les deux cas sont les mêmes, mais le facteur de forme dans le cas des poutres non renforcées est beaucoup moins grand. Cette observation est très importante, car, même si les valeurs extrêmes de résistance sont ici peu différentes, la distribution de ces résistances n'est pas sans conséquences pour le dimensionnement des structures.. Dans notre de cas, la valeur de la résistance pour le cinquième centile augmente de 40,45 à 64,88 MPa quand on vient renforcer le bois en traction, ce qui représente une augmentation de 60% de la résistance caractéristique. Cette performance est probablement due à la capacité du renforcement à supporter des concentrations de contrainte au voisinage des défauts, autrement dit à limiter la propagation de fissures.

L'épaisseur (hauteur)de bois plastifié et déformation maximale de la fibre extrême comprimée

Nous nous intéressons ici au volume de bois qui a été endommagé en compression pendant l'essai. Sur la Figure 2.20, nous observons deux distributions de même forme mais d'amplitude différente, ce qui est donné par le paramètre d'échelle ϕ montre que le renforcement fait travailler le bois renforcé en compression beaucoup plus que celui sans renfort, puisque l'épaisseur plastifiée est beaucoup plus importante.

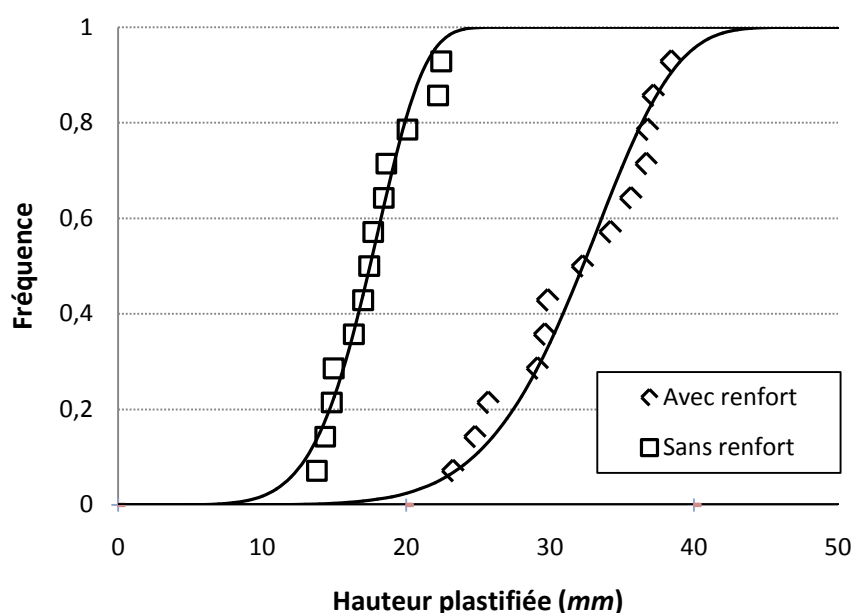


Figure 2.20. Épaisseur du bois plastifiée dans la section mi-travée

Paramètres Weibull	k	ϕ
Poutres sans renfort	7	19
Poutres avec renfort	7	34

Tableau 2.7. Paramètres statistiques de la distribution Weibull de l'épaisseur plastique

Le modèle élasto plastique est à examiner au vu de ces résultats. Nous avons précédemment évoqué la difficulté de fixer la valeur du coefficient m , lequel pilote la pente du comportement dans le domaine plastique (0). La déformation plastique en compression étant beaucoup plus importante pour les poutres renforcées, une modélisation avec $m < 0$ serait alors plus judicieuse, alors qu'en l'absence de renforcement, cette déformation beaucoup moins grande laisse supposer que le modèle avec $m > 0$

serait plus approprié. La comparaison des déformations ultimes en traction calculées par le modèle et mesurées par des jauges donne une différence d'environ 13%. Ces écarts ne sont pas entièrement dus à l'imprécision du modèle, mais aussi à celle de la valeur du module de déformation. Ils laissent penser cependant qu'un modèle reproduisant plus fidèlement le comportement plastique du bois en compression donnerait une meilleure précision.

2.5. Conclusion

Le but de cette partie est de connaître le domaine d'intérêt d'un renforcement du bois par un matériau composite tel que le CFRP en faible quantité. On vise ici l'amélioration du comportement à la rupture plus que l'augmentation de raideur. Les essais ainsi que leur analyse par un modèle élasto-plastique nous informent que le renforcement a pour effet d'augmenter les valeurs moyennes du module de rupture du bois, non pas en décalant l'ensemble des valeurs, mais en diminuant la dispersion expérimentale. On estime que le renforcement vient s'opposer à l'influence des défauts à la propagation des fissures de traction au voisinage des singularités du bois. C'est donc en lissant les défauts de traction du bois que le renforcement agit. Une conséquence est que la ductilité structurelle augmente, du fait que la zone plastifiée en compression a augmenté. En renforçant le bois en traction, le concepteur peut donc bénéficier d'une résistance caractéristique plus grande en flexion.

L'augmentation de la rigidité étant proportionnelle à la quantité du renfort, elle n'est pas significative ici. Cette conclusion introduit la question de l'optimisation du rapport rigidité / coût.

Les renforts utilisés dans cette étude sont en carbone. Nous pouvons nous interroger sur la possibilité d'utiliser d'autres matériaux que le carbone, par exemple la fibre de verre (GFRP) ou des composites à base de fibres naturelles (composite de lin par exemple). En fait, c'est la rigidité $Module \times Épaisseur$ qui intervient dans le problème, si bien que l'usage d'un composite différent du carbone devrait produire les mêmes résultats à la condition que les produits $Module \times Épaisseur$ soient identiques. Pour le GFRP par exemple E_{CFRP} / E_{GFRP} varie de 3,5 à 4, l'épaisseur de GFRP devrait donc théoriquement être augmentée d'autant.

Les questions qui émergent portent sur le changement d'échelle et l'insertion de poutres bois-composite dans une structure globale. Sur ce dernier point, dans le cas de tablier de pont, une dalle en béton sera connectée aux poutres. La rupture s'en trouvera donc modifiée, notamment, elle devrait être plus brutale, mais à une charge plus importante, car la rupture ne devrait plus se produire suivant le schéma de plastification du bois en compression. Par ailleurs, le changement d'échelle pose la question d'une possible rupture dans une zone tendue, mais suffisamment éloignée du renfort pour que ce dernier devienne inefficace. C'est en effet une conclusion que l'on peut tirer des essais de structure réalisés au LCPC dans le cadre du projet NR2C. Il existe de nombreux axes d'amélioration possible. Mais nous avons choisi à l'issue de cette étude préliminaire d'investiger le multi renforcement dans l'épaisseur de la partie tendue du bois.

C'est l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 3. Modélisation d'une poutre fléchie multi-renforcée

Les essais du chapitre précédent montrent que la présence du plat carbone répartit mieux les efforts dans la lame inférieure, tendant ainsi à diminuer l'impact des défauts les plus importants qui sont les maillons faibles du système. La propagation d'une fissure s'initiant dans une zone fragile du bois peut ainsi se trouver stoppée ou « cousue » temporairement par la lame carbone qui décharge ainsi la fissure. Sans augmenter la capacité maximale que l'on peut espérer de la poutre, le renforcement a permis de diminuer la dispersion des essais, en limitant l'influence des défauts les plus importants. Cependant, on constate que l'apparition de la fissure critique conduit toujours à la ruine catastrophique de la poutre. La fissure démarre (rupture en traction du bois) puis bifurque (rupture en cisaillement, en pointe de fissure).

La proposition du multi renforcement ou multi lamage (Figure 3.1) est motivée par l'idée qu'il faut stopper la propagation de cette fissure critique avant qu'elle ne traverse l'échantillon ou avant que le cisaillement maximum en pointe soit supérieur à une valeur permettant la bifurcation catastrophique. Il est certain que placer sur le chemin de cette fissure une lamelle de carbone, stoppera l'évolution en mode I. Il est difficile sans essais ou modélisation de dire si elle se propagera ou non en cisaillement, soit dans le bois avant la lamelle, soit à l'interface avec la lamelle.

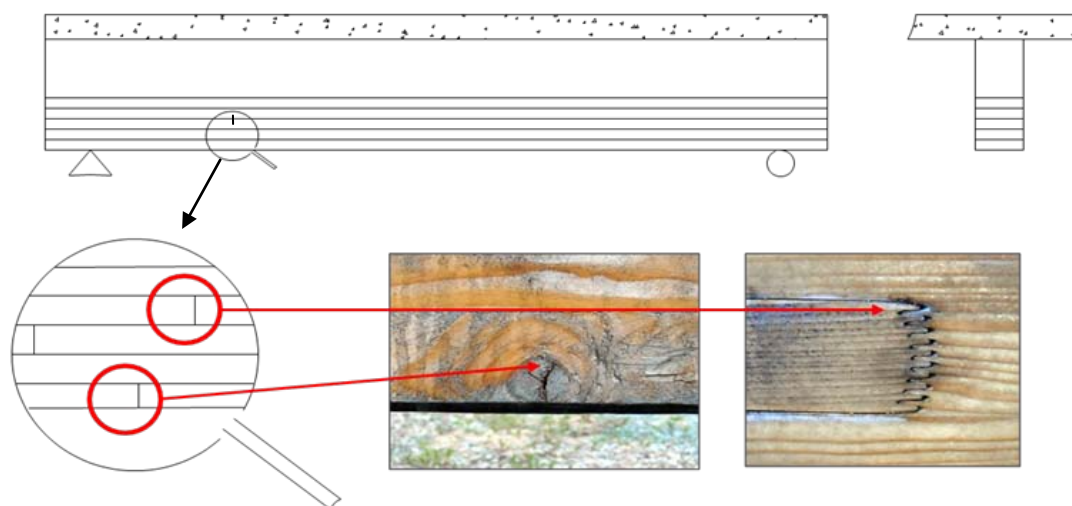


Figure 3.1. Proposition du multi renforcement (ou multi lamage)

C'est à ces questions qu'il s'agit d'essayer de répondre ici, en proposant une modélisation aidant à la compréhension des mécanismes du système multi renforcé, en mettant en évidence la sensibilité des différents paramètres identifiés. Ces paramètres (épaisseur des lamelles, écartements, modules etc...) sont trop nombreux pour n'envisager qu'une approche expérimentale « à tâtons », d'autant qu'il faut travailler à l'échelle 1 pour s'affranchir des effets d'échelle très importants dans ce genre de problématique.

Ce chapitre décrit la problématique mécanique des multicouches, propose une revue des modélisations, expose la modélisation originale proposée et décrit la solution élastique du problème.

3.1. Les modèles multicouches

La structure multi lamée ou multi renforcée bois-composite est représentée sur la Figure 3.2



Figure 3.2. Renforcement multi lamé

Il s'agit donc d'un n couche de composite (FRP) intégrées entre les lamelles de bois.

Le chargement peut-être divers, de flexion principalement, mais il a été choisi une étude plus large autorisant les tractions ou torsions par exemple. Les conditions aux limites doivent elles aussi rester variées, puisqu'il s'agira de prendre en compte des fissurations ou ancrages divers.

Le calcul d'une telle structure est relativement complexe car la connaissance précise des champs de contrainte est nécessaire pour décrire la ruine. Cette poutre peu élancée, ne peut être abordée par des méthodes classiques homogènes et isotropes. Il s'agit résolument d'une plaque multicouche avec des singularités, bords libres, fissures et interfaces. En voulant s'intéresser à la ruine on ajoute également la difficulté liée à la définition de critères de rupture pour ce type de structure.

3.1.1. Les modèles existants

Il existe cependant bien des pistes qui vont être maintenant passée en revue.

Il est possible d'aborder le calcul des structures multicouches en gardant une vision 3D classique, en décrivant les différentes couches, les interfaces, les conditions de continuité. Une résolution par éléments finis est alors possible avec les outils classiques. Le coût de calcul est cependant très important et voir prohibitif. De plus, il est difficile d'approcher les zones de concentration de contrainte (bord, interface, fissure) qui demandent un maillage très fin. Enfin cette méthode numérique ne permet pas de proposer des valeurs de contrainte lorsqu'une singularité existe (bords libres par exemple) puisque la dépendance au maillage est alors inévitable. Il faut y adjoindre alors du post traitement et par exemple des intégrations sur des domaines définis par l'opérateur et permettant d'atteindre une valeur convergée et indépendante du maillage (C.Hochard, 2002). La plasticité ou de la viscosité si elles existent peuvent lisser ces singularités et supprimer cet écueil lié aux modélisations par EF. Il existe également des résolutions 3D analytiques de problèmes particuliers (Pagano 1969, 1970) efficaces et riches d'enseignements, mais ne concernant bien entendu que certains jeux de chargements, conditions aux limites et géométries.

Pour toutes ces raisons il est plus évident et plus naturel d'aborder le calcul des multicouches qui possèdent en général une topologie de plaque, une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions, par des approches 2D. De nombreux modèles existent, inspirés au départ par les modèles de plaques homogènes classiques (Love Kirchhoff, Reissner...), adaptés aux particularités des multicouches et développés pour différents besoins.

Pour passer en revue les différentes propositions faites dans la littérature, il est légitime de s'inspirer de la revue très complète réalisée par (Carrera, 2000) qui regroupe les modèles de plaques multicouches en 3 familles :

- les modèles type mécanique des milieux continus à cinématique enrichie (Cosserat, 1999)

- les méthodes dites « asymptotiques » qui affinent une solution grossière par développement asymptotique et à travers un cadre mathématique extrêmement rigoureux (on rajoute ici aux auteurs cités dans (Carrera, 2000), (Nguyen, 2005).

- et enfin les approches de loin les plus nombreuses que E.Carrera qualifie d'approche « axiomatiques ». Ces dernières postulent une forme en z (suivant l'épaisseur de la plaque) des champs de déplacement et/ou de contrainte. Les intuitions sont nombreuses et font l'objet de très nombreuses publications. Il ne sera maintenant fait référence qu'à la famille de ces modèles « *axiomatic* », de loin la plus importante et celle à laquelle appartient le modèle choisi pour cet article.

A l'intérieur de cette famille d'approche, E.Carrera ajoute deux critères communs permettant de classer plus finement les travaux. Le premier concerne le choix des variables inconnues, déplacements, contraintes ou mixtes. Le second, le choix du type de description de l'empilement, une monocouche équivalente obtenue par homogénéisation ou une description plus fine par couche.

Dans le cas où l'on décide de décrire le multicouche comme une simple couche homogène équivalente, les modèles proposés dérivent des théories de plaque homogène de Love Kirchhoff ou Reissner Mindlin selon de degré en Z des champs de déplacements (le plus souvent) postulés. The Classical Lamination Theory (Reddy, 1997) (Stavsky, 1961), qui néglige les déformations de cisaillement transverse, the First Shear Deformation Theorie (Reissner, 1945) (Mindlin, 1951) ou même the High Shear Order deformation Theories en sont les exemples les plus classiques et diffèrent par le degré des polynômes qui décrivent les champs de déplacement. Une revue exhaustive est dans (Murakami, 1987).

Ces modèles sont plutôt réservés au dimensionnement en raideur des plaques multicouches même épaisse, car ne permettant pas l'étude des aspects locaux, bords libres ou même interface. L'avantage opérationnel est cependant évident du fait d'un nombre de degré de liberté cinématique indépendant du nombre de couches.

Si l'on veut aller plus loin que ces modèles homogénéisés (Equivalent Single Layer), la description de la cinématique (ou des contraintes) dans chaque couche et des conditions de continuité aux interfaces est nécessaire. Il s'agit de la famille des modèles « Layer-Wise » (srinivas, 1973). L'inconvénient évident lié à cet enrichissement cinématique est l'augmentation du nombre de degré de liberté qui dépend alors du nombre de couche. Pour pallier à cet inconvénient plusieurs familles de modèles ont été proposés et regroupés classiquement sous la dénomination « Zig-Zag » et ce du fait de la forme caractéristique du champ de déplacement dans l'épaisseur. Ces modèles prennent en compte le changement brutal des propriétés matériau à chaque interface et les conditions de continuité. L'un de ces développements (Murakami, 1987), (Carrera, 1998), postule une fonction linéaire normée dont la pente change de signe à chaque interface, qui s'ajoute à un champ de déplacement de type ESL. D'autres approches proposent d'ajouter plutôt qu'une fonction linéaire, un autre type de fonction (Touratier, 2000). Même si son sens physique n'est pas si évident, on peut voir cette fonction comme une perturbation qui brise la cinématique de la plaque homogène équivalente tout en conservant un nombre de degré de liberté indépendant du nombre de couche. En introduisant ce type de cinématique dans une formulation variationnelle les auteurs identifient une forme en z pour les contraintes de cisaillement transverses. Le choix de la cinématique initiale, linéaire (FSDT) ou non (HSODT) provide différents modèles plus ou moins raffinés et qui permettent une bonne approche de la réalité 3D. Ces approches sont destinées au dimensionnement en raideur de stratifiés épais ou sandwichs, car une bonne description des champs dans l'épaisseur est obtenue.

Une façon d'aller encore plus loin, par exemple pour l'étude des singularités, fissures ou autres effets de bords, est de proposer des approches layerwise qui postulent dans chaque couche des champs indépendants dans leur description mais respectant des conditions de continuité aux interfaces. Le prix à payer est bien entendu un nombre de degré de liberté dépendant du nombre de couche. Plusieurs approches sont alors possibles selon que l'on décide d'approximer les déplacements (Pagano, 1970), ou les contraintes et déplacements (Carrera, 1999). Les approches en contraintes seules sont plus rares. Pourtant l'étude des singularités et concentrations de contraintes nécessitent bien entendu la meilleure approche possible pour les champs de contraintes, et donc une approche en

contrainte semble plus naturelle. Il est cependant difficile de postuler la forme d'un champ qui soit statiquement admissible.

Une très belle approche de ce type a été proposée par Pagano (Pagano, 1978) et peu développée depuis. On citera cependant (Naciri, 1998) qui ont exploité le potentiel de cette méthode. Pagano, utilisant une formulation variationnelle de Reissner (Reissner, 1950) considérée comme une formulation mixte, postule un champ de contrainte, mais pas de champ de déplacement 3D, comme il le précise lui-même dans une note de bas de page (Pagano, 1978), « note that we refrain from assuming the form of the displacement field in accordance with the objectionable features of that approach described earlier ».

Ceci est un point très important et peu commenté. En effet, la formulation mixte de Reissner ou Hellinger Reissner, permet d'exprimer la dualité naturelle entre champs de contrainte et champs de déplacements. De plus elle ne nécessite pas de proposer un champ de contrainte statiquement admissible.

Pagano a donc proposé d'exprimer le champ de contrainte comme des polynômes en z , dont les coefficients s'expriment en fonction des efforts généralisés, par exemple tensions, moments, efforts tranchants, dans chaque couche.

On peut proposer bien évidemment ensuite des expressions également pour les autres composantes des contraintes, faisant intervenir d'autres efforts généralisés (Pagano 1978). On y reviendra plus loin pour le modèle proposé mais on peut souligner ici l'idée majeure de N.J. Pagano qui fut d'introduire directement dans la méthode, en plus des efforts de plaque classiques, les contraintes au niveau des interfaces, sites privilégiés des concentrations de contraintes et des endommagements, décrits comme des efforts généralisés.

Pour ce faire il propose une expression des contraintes 3D de cisaillement et d'arrachement les faisant intervenir (respectivement polynômes en z^2 et z^3 que l'on trouvera dans (Pagano, 1978), et obtient ainsi, déformations généralisées d'interfaces associées, des conditions d'équilibre et un comportement d'interface.

Malgré l'utilisation de cette formulation mixte, il n'a donc pas été nécessaire de proposer une expression approchée des déplacements 3D. Dans (Pagano, 1978) on trouvera les détails d'un modèle complet qui possède $7n$ degré de liberté par couches.

Marchant dans ces pas, des auteurs ont proposé des modèles dérivés, moins riches mais adaptés à des situations spécifiques. L'approche détaillée ici est une formulation à $5n$ degré de liberté par couche, et qui peut être vu comme un empilement de plaque de Reissner collées par des efforts d'interface comme définis par Pagano.

3.1.2. Approche multiparticulaire

Nous allons dans ce paragraphe faire un bref résumé de deux modèles multiparticulaires, l'un étant plus simplifié que l'autre, qui allient le mieux richesse de description des champs et caractère opératoire. Le modèle considère le multicouche comme la superposition de plaque de Reissner (modèle $\mathcal{M}4-5n$), ou la plaque de Kirchhoff (modèle $\mathcal{M}4-2n+1P$), liées par des efforts d'interface. La construction du modèle est fondée sur la méthode d'approximation d'Hellinger – Reissner (Reissner, 50). L'introduction des contraintes approchées à partir des efforts généralisés dans une adaptation de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner a permis d'identifier les déplacements et les déformations généralisés. L'application du théorème de Reissner et avec quelques hypothèses énergétiques, donne ensuite les équations de comportement et d'équilibre et les conditions aux limites.

Le modèle des matériaux multicouches a été présenté par (Chabot, 1997), qui formalise une construction d'une famille de modèles multi particulaire $\mathcal{M}4$ élastiques (Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches). Ce modèle est construit à partir d'une approximation des contraintes injectées dans la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner. Les contraintes sont approchées par des

polynômes en z . Ces modèles proposent une cinématique par couche plutôt que des cinématiques globales qui sont proposées par les modèles de plaque d'ordre supérieur. Dans le cas des modèles multiparticulaires, le multicouche est représenté par un ensemble des plaques (objet 2D) couplées par des efforts d'interfaces (voir Figure 3.3). Le multicouche devient ainsi un objet 2D dont chaque point géométrique est le siège d'une superposition de particules matérielles correspondant aux plaques modélisant les couches.

Plusieurs travaux ont été consacrés à ce modèle. Philippe (Philippe, 1997) a présenté des modélisations multiparticulaires adaptées à la description du comportement de structures sandwichs en matériaux composites. La validation des modèles a été préalablement effectuée par comparaison à des solutions obtenues soit analytiquement soit à l'aide d'éléments finis (Carreira, 1998). (Hadj-Ahmed, 1999) a appliqué le modèle $\mathcal{M}4$ à l'optimisation du transfert des efforts par cisaillement dans un joint de colle. (Lagarde, 2000) a utilisé une modélisation multiparticulaires dans le cas de grandes transformations. [Diaz Diaz, 2001] a utilisé une modélisation multiparticulaire pour établir un critère de délaminage. (Tran, 2001) fait une modélisation des couches de chaussée par un modèle $\mathcal{M}4$. (Nguyen T., 2004) a implémenté le modèle $\mathcal{M}4$ dans un code éléments finis. (Pham S., 2006) a introduit les interfaces imparfaites dans les modèles $\mathcal{M}4$ pour la modélisation de la connexion dans les poutres mixtes bois-béton. (Duong V., 2007) a continué le travail de (Nguyen T., 2004) par l'introduction dans leur code éléments finis des modules de calcul dynamique et du modèle des interfaces imparfaites. Une implémentation dans ABAQUS est en cours.

3.1.3. Approximation des champs des contraintes et des déplacements

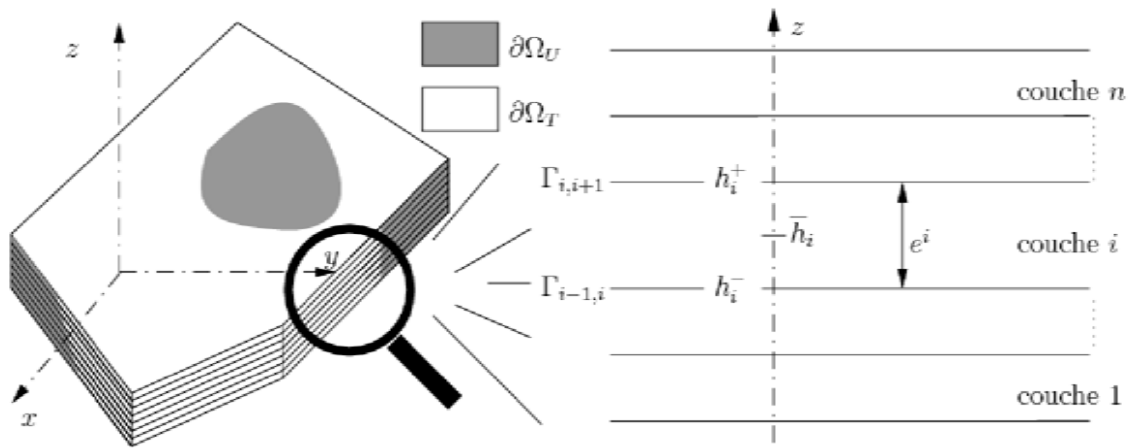


Figure 3.3. *Problème multicouche*

Nous proposons deux types d'approximation du champ de contraintes 3D, l'une étant plus précise que l'autre (Chabot, 1997). Le premier modèle est le $\mathcal{M}4$ -5n qui approche chaque couche par une plaque de Reissner (Reissner, 1945) et le deuxième est le modèle $\mathcal{M}4$ -2n+1P qui approche chaque couche par une plaque. Le multicouche (objet 3D) devient ainsi une superposition de plaques ou de membranes couplées entre elles par des efforts d'interface. L'entité 2D qui modélise le multicouche est constituée de points géométriques occupés par n particules matérielles. L'approximation des contraintes sera exactement la même que dans le cadre de l'élasticité (Chabot, 1997)

Champs de contraintes approchées du modèle $\mathcal{M}4$ -5n

Nous approchons les contraintes dans le plan par des polynômes en z du premier degré. On les notera $\sigma_{\alpha\beta}((\alpha,\beta)\in\{1,2\})$. En utilisant les équations d'équilibre 3D, nous déduisons que les degrés des polynômes en z approchant les contraintes $\sigma_{\alpha 3}$ et σ_{33} sont respectivement 2 et 3. On choisit les

coefficients des polynômes qui apparaissent dans l'écriture des contraintes approchées de manière à faire intervenir les champs suivants qu'on appelle efforts intérieurs généralisés :

- le tenseur plan \tilde{N}^i d'ordre 2 des efforts membranaires de la couche i (avec $1 \leq i \leq n$) :

$$N_{\alpha\beta}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz \quad (3.1)$$

- le tenseur plan \tilde{M}^i d'ordre 2 des moments de flexion par rapport au plan médian de la couche i (avec $1 \leq i \leq n$) :

$$M_{\alpha\beta}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i) \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z) dz \quad (3.2)$$

- le vecteur plan \tilde{Q}^i d'effort tranchant de la couche i (avec $1 \leq i \leq n$) :

$$Q_{\alpha\beta}^i(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha 3}(x, y, z) dz \quad (3.3)$$

- le vecteur plan $\tilde{\tau}^{j,j+1}$ d'effort intérieur de cisaillement à l'interface $j, j+1$ ($1 \leq j \leq n-1$) :

$$\tau_{\alpha}^{j,j+1}(x, y) = \sigma_{\alpha 3}(x, y, h_j^+) \quad (3.4)$$

- le scalaire $\nu^{j,j+1}$ d'effort d'arrachement à l'interface $j, j+1$ (avec $1 \leq j \leq n-1$) :

$$\nu_{\alpha}^{j,j+1}(x, y) = \sigma_{33}(x, y, h_j^+) \quad (3.5)$$

On définit une base $(P_j^i)_{0 \leq j \leq 3}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, avec

$$\begin{cases} P_0^i(z) = 1 \\ P_1^i(z) = \frac{z - \bar{h}_j}{e^i} \\ P_2^i(z) = 6 \left(\frac{z - \bar{h}_j}{e^i} \right)^2 + \frac{1}{2} \\ P_3^i(z) = -2 \left(\frac{z - \bar{h}_j}{e^i} \right)^3 + \frac{3}{10} \left(\frac{z - \bar{h}_j}{e^i} \right)^2 \end{cases} \quad (3.6)$$

Ces polynômes ainsi définis sont orthogonaux entre eux, c'est-à-dire:

$$\int_{h_i^-}^{h_i^+} P_{\alpha}^i(z) P_{\beta}^i(z) dz = 0 \text{ si } \alpha \neq \beta \quad (3.7)$$

Les contraintes approchées dans la couche i qui vérifient les équations 3 à (3.5) s'écrivent alors :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{5n}(x, y, z) = N_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + 12M_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{P_1^i(z)}{(e^i)^2} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^{5n}(x, y, z) = & Q_{\alpha}^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \left(\tau_{\alpha}^{j,j+1}(x, y) - \tau_{\alpha}^{j-1,j}(x, y) \right) P_1^i(z) \\ & + \left(Q_{\alpha}^i(x, y) + \frac{e^i}{2} \left(\tau_{\alpha}^{j,j+1}(x, y) - \tau_{\alpha}^{j-1,j}(x, y) \right) \right) \frac{P_2^i(z)}{e^i} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{5n}(x, y, z) = & \left(\frac{\nu^{j,j+1}(x, y) + \nu^{j-1,j}(x, y)}{2} + \frac{e^i}{12} \operatorname{div} \left(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{j-1,j}(x, y) \right) \right) P_0^i(z) \\ & + \left(\frac{e^i}{10} \operatorname{div} \left(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{j-1,j}(x, y) \right) - \operatorname{div} \frac{\tilde{Q}^i(x, y)}{5} + \nu^{j,j+1}(x, y) \right. \\ & \left. - \nu^{j-1,j}(x, y) \right) P_1^i(z) + \frac{e^i}{12} \operatorname{div} \left(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{j-1,j}(x, y) \right) P_2^i(z) \\ & - \left(\frac{e^i}{10} \operatorname{div} \left(\tau^{j,j+1}(x, y) + \tau^{j-1,j}(x, y) \right) - \operatorname{div} \tilde{Q}^i(x, y) \right) P_3^i(z) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Puisque les polynômes $(P_j^i)_{0 \leq j \leq 3}$ sont donnés, la connaissance des efforts intérieurs généralisés définis ci-dessus (des champs en (x, y)) permet de déterminer l'état de contraintes 3D approché du modèle $\mathcal{M}4-5n$.

Remarque : Dans ce qui précède, les efforts d'interfaces $(\tau_{\alpha}^{j,j+1}(x, y)$ et $\nu^{j,j+1}(x, y)$ sont définis pour j variant de 1 à $n-1$. Cependant il est commode de noter $\tau_{\alpha}^{0,1}(x, y)$, $\nu^{0,1}(x, y)$ et $\tau_{\alpha}^{n,n+1}(x, y)$, $\nu^{n,n+1}(x, y)$ les efforts extérieurs sur les faces, respectivement, inférieure et supérieure du multicouche. Ces efforts sont donc des données. Si nous notons $T_{\alpha}^{-}(x, y)$ et $T_{\alpha}^{+}(x, y)$ la composante suivant α du vecteur contrainte imposé sur les faces, respectivement, inférieure et supérieure du multicouche, nous avons :

$$\begin{cases} \tau_1^{0,1}(x, y) = T_1^{-}(x, y) \\ \tau_2^{0,1}(x, y) = T_2^{-}(x, y) \\ \nu^{0,1}(x, y) = T_3^{-}(x, y) \end{cases} \text{ respectivement } \begin{cases} \tau_1^{n,n+1}(x, y) = T_1^{+}(x, y) \\ \tau_2^{n,n+1}(x, y) = T_2^{+}(x, y) \\ \nu^{n,n+1}(x, y) = T_3^{+}(x, y) \end{cases} \quad (3.11)$$

Champ de contraintes approchées du modèle $\mathcal{M}4-2n+1$ Plaque

Dans cette approche, les couches sont des plaques de Kirchhoff sans effort tranchant. Nous approchons les contraintes dans le plan par des polynômes en z du premier degré. Les contraintes membranaires sont approchées par :

$$\sigma_{\alpha\beta}^{2n+1P}(x, y, z) = N_{\alpha\beta}^i(x, y) \frac{P_0^i(z)}{e^i} + \frac{12}{(e^i)^2} M_{\alpha\beta}^i(x, y) P_1^i(z) \quad (3.12)$$

Les contraintes de cisaillement hors plan :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^{2n+1P}(x, y, z) = & \frac{1}{2} \left(\tau_{\alpha}^{j,j+1}(x, y) + \tau_{\alpha}^{j-1,j}(x, y) + \frac{M_{\alpha\beta,\beta}^i(x, y)}{e^i} \right) P_0^i(z) \\ & + \left(\tau_{\alpha}^{j,j+1}(x, y) - \tau_{\alpha}^{j-1,j}(x, y) \right) P_1^i(z) + \frac{M_{\alpha\beta,\beta}^i(x, y)}{e^i} P_2^i(z) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Les contraintes d'arrachement :

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{5n}(x, y, z) = & \left[\begin{aligned} & \frac{T_3^+(x, y) + T_3^-(x, y)}{2} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n \frac{e^j}{2} \operatorname{div} \left(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{j-1,j}(x, y) \right) + \operatorname{div} \underline{\operatorname{div}} \tilde{\tilde{M}}^j(x, y) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{e^j}{2} \operatorname{div} \left(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{j-1,j}(x, y) \right) + \operatorname{div} \underline{\operatorname{div}} \tilde{\tilde{M}}^j(x, y) \\ & + \frac{e^j}{12} \operatorname{div} \left(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{j-1,j}(x, y) \right) \\ & - \left(\frac{e^j}{2} \operatorname{div} \left(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{j-1,j}(x, y) \right) + \frac{6}{5} \operatorname{div} \underline{\operatorname{div}} \tilde{\tilde{M}}^j(x, y) \right) P_1^i(z) \\ & + \frac{e^j}{12} \operatorname{div} \left(\tilde{\tau}^{j,j+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{j-1,j}(x, y) \right) P_2^i(z) - \operatorname{div} \underline{\operatorname{div}} \tilde{\tilde{M}}^j(x, y) P_3^i(z) \end{aligned} \right] P_0^i(z) \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.1.4. Les équations du modèle et les conditions aux limites

Nous allons écrire les équations d'équilibre et de comportement cohérentes avec l'approximation en contrainte (plus de détails dans [Chabot, 1997])

Modèle $\mathcal{M}4\text{-}5n$

Les équations d'équilibre

En appliquant le théorème de (Reissner, 50), les équations d'équilibre sont :

$$\widetilde{\operatorname{div}} \tilde{\tilde{N}}^i(x, y) + \tilde{\tau}^{j,j+1}(x, y) - \tilde{\tau}^{j-1,j}(x, y) = 0 \text{ sur } \omega \quad (3.15)$$

$$\operatorname{div} \tilde{Q}^i(x, y) + v^{j,i+1}(x, y) - v^{j-1,i}(x, y) = 0 \text{ sur } \omega \quad (3.16)$$

$$\widetilde{\operatorname{div}} \tilde{\tilde{M}}^i(x, y) - \tilde{Q}^i(x, y) + \frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{j,j+1}(x, y) + \tilde{\tau}^{j-1,j}(x, y)) = 0 \text{ sur } \omega \quad (3.17)$$

Les équations d'équilibre généralisé sont du type *Reissner par couche* et cohérent avec l'équation d'équilibre 3D local :

$$\underline{\operatorname{div}} \underline{\underline{\sigma}}^{5n}(x, y, z) = 0 \quad (3.18)$$

Conditions aux limites en contrainte

$$\begin{cases} \tilde{N}^i \cdot \underline{n} = \tilde{T}_d^i \\ \tilde{M}^i \cdot \underline{n} = \tilde{M}_d^i \\ \tilde{Q}^i \cdot \underline{n} = Q_{3d}^i \end{cases} \quad (3.19)$$

Déplacements généralisés

$$\begin{cases} U_\alpha^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_\alpha^*(x, y, z) dz \\ \phi_\alpha^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12}{(e^i)^2} P_1^i(z) U_\alpha^*(x, y, z) dz \\ U_3^{i*}(x, y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_3^*(x, y, z) dz \end{cases} \quad (3.20)$$

Déformations généralisées

Tenseur de déformation membranaire de la couche i

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_\alpha^i}{\partial x_\beta} + \frac{\partial U_\beta^i}{\partial x_\alpha} \right) \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (3.21)$$

Tenseur de courbure de la couche i

$$\chi_{\alpha\beta}^i(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_\alpha^i}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \phi_\beta^i}{\partial x_\alpha} \right) \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \quad (3.22)$$

On peut en déduire la dualité énergétique entre efforts et déformations généralisés pour $i \in \{1, n\}$ et $j \in \{1, n-1\}$.

$$\begin{aligned} \tilde{N}^i &\leftrightarrow \tilde{\varepsilon}^i(x, y) = \frac{1}{2} (Gr \tilde{a} d \tilde{U}^i + {}^T Gr \tilde{a} d \tilde{U}^i) \\ \tilde{M}^i &\leftrightarrow \tilde{\chi}^i(x, y) = \frac{1}{2} (Gr \tilde{a} d \tilde{\phi}^i + {}^T Gr \tilde{a} d \tilde{\phi}^i) \\ \tilde{Q}^i &\leftrightarrow \tilde{d}_\phi^i(x, y) = \frac{1}{2} (\tilde{\phi}^i + {}^T Gr \tilde{a} d U_3^i) \\ \tilde{\tau}^{j,j+1} &\leftrightarrow \tilde{D}^{j,j+1}(x, y) = \tilde{U}^{j+1} - \tilde{U}^j - \frac{e^j}{2} \tilde{\phi}^j - \frac{e^{j+1}}{2} \tilde{\phi}^{j+1} \\ \tilde{\gamma}^{j,j+1} &\leftrightarrow \tilde{D}^{j,j+1}(x, y) = \tilde{U}_3^{j+1} - \tilde{U}_3^j \end{aligned} \quad (3.23)$$

Loi de comportement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{e^i} \tilde{S}^i : \tilde{N}^i \\ \tilde{\chi}^i = \frac{12}{(e^i)^3} \tilde{S}^i : \tilde{M}^i \\ \tilde{d}_\phi^i = \frac{6}{5} \tilde{S}_Q^i \tilde{Q}^i - \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^i (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \\ \tilde{D}^{j,j+1} = -\frac{1}{10} \tilde{S}_Q^j \tilde{Q}^j - \frac{1}{10} \tilde{S}_Q^{j+1} \tilde{Q}^{j+1} - \frac{e^j}{30} \tilde{S}_Q^j \tilde{\tau}^{j-1,j} + \\ \quad + \frac{2}{15} (e^j \tilde{S}_Q^j + e^{j+1} \tilde{S}_Q^{j+1}) \tilde{\tau}^{j,j+1} - \frac{e^{j+1}}{30} \tilde{S}_Q^{j+1} \tilde{\tau}^{j+1,j+2} \\ D_v^{j,j+1} = \frac{9}{70} e^j \tilde{S}_v^j v^{j-1,j} + \frac{13}{35} (e^j \tilde{S}_v^j + e^{j+1} \tilde{S}_v^{j+1}) v^{j,j+1} \\ \quad + \frac{9}{70} e^{j+1} \tilde{S}_v^{j+1} v^{j+1,j+2} \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Modèle $\mathcal{M}4\text{-}2n+1\text{P}$

Nous procédons de la même manière que nous avons faite pour le modèle $\mathcal{M}4\text{-}5n$, (plus de détails dans (Chabot, 1997))

Les équations d'équilibre du modèle $\mathcal{M}4\text{-}2n+1$

$$\left\{ \begin{array}{l} d\tilde{v}\tilde{N}^i(x,y) + \tilde{\tau}^{j,j+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{j-1,j}(x,y) = 0 \text{ sur } \omega \\ \sum_{i=1}^n \left(\frac{e^i}{2} \text{div}(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) + \text{div}(\underline{\text{div}}(\tilde{M}^i)) \right) + (T_3^+ + T_3^-) = 0 \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{N}^i \underline{n} = \tilde{T}_d^i \\ \underline{n} \cdot \sum_{i=1}^n \tilde{M}^i \underline{n} = \tilde{M}_d \underline{n} \\ \sum_{i=1}^n \left(\frac{e^i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) + (\underline{\text{div}}(\tilde{M}^i)) \underline{n} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\underline{t} \cdot \sum_{i=1}^n \tilde{M}^i \underline{n} - \tilde{M}_d \underline{t} \right] - \tilde{Q}_{3d} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Les champs de déplacements généralisés

$$\left\{ \begin{array}{l} U_\alpha^{i*}(x,y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_\alpha^*(x,y,z) dz \\ W(x,y) = \frac{U_3(x,y,h_n^+) + U_3(x,y,h_1^-)}{2} \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Les champs de déformations généralisées :

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}^i(x, y) = \frac{1}{2}(Gr\tilde{a}d\tilde{U}^i + {}^TGr\tilde{a}d\tilde{U}^i) \\ \tilde{\chi}^i(x, y) = -Gr\tilde{a}dGr\tilde{a}dW_3 = \tilde{\chi}^j(x, y) \quad \forall i, j \\ \tilde{D}^{j,j+1}(x, y) = \tilde{U}^{j+1} - \tilde{U}^j + \frac{e^{j+1} + e^j}{2}Gr\tilde{a}dW_3 \end{cases} \quad (3.28)$$

Loi de comportement

En négligeant l'énergie élastique des contraintes normales d'arrachement des couches et l'énergie élastique de couplage entre les contraintes membranaires et les contraintes normales d'arrachement, nous en déduisons les lois de comportement du modèle $\mathcal{M}4-2n+1$:

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{e^i} \tilde{\tilde{S}}^i : \tilde{\tilde{N}}^i \\ \tilde{\chi}^i = \frac{12}{(e^i)^3} \tilde{\tilde{S}}^i : \tilde{\tilde{M}}^i = \tilde{\chi}^j \quad \forall i, j \\ \tilde{D}^{j,j+1} = \frac{e^i}{6} (\tilde{\tilde{S}}_Q^j) \tilde{\tau}^{j-1,j} + \frac{1}{3} (e^j \tilde{\tilde{S}}_Q^j + e^{j+1} \tilde{\tilde{S}}_Q^{j+1}) \tilde{\tau}^{j,j+1} + \frac{e^{j+1}}{6} \tilde{\tilde{S}}_Q^{j+1} \tilde{\tau}^{j+1,j+2} \end{cases} \quad (3.29)$$

3.2. Modélisation des poutres multicouches en flexion

Après ces rappels des modèles qui vont être utilisés, on s'intéresse à notre problème de poutre multi renforcée.

3.2.1. Description du problème

Nous nous intéressons au cas d'une poutre multicouche en flexion (voir Figure 3.4). Dans cette partie seront présentées les résolutions du problème par le $\mathcal{M}4-2n+1P$ et par le $\mathcal{M}4-5n$ d'un multicouche uniaxial en flexion, permettant d'étudier le problème de bords libres ou des fissures transverses, ainsi des fissures d'interfaces que nous détaillerons plutôt dans le chapitre 4.

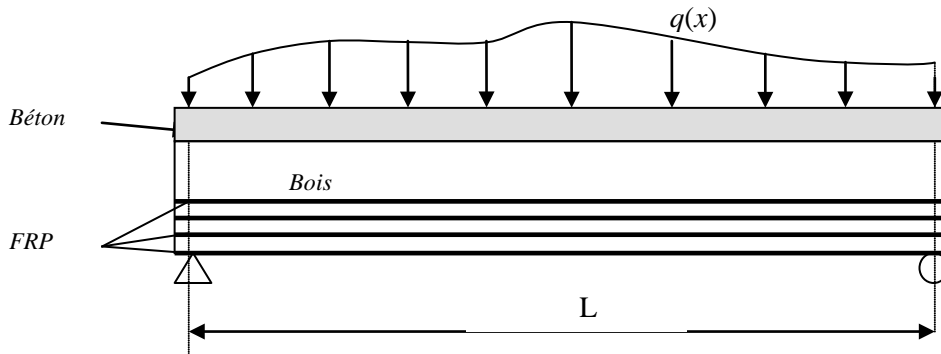


Figure 3.4. Poutre multi renforcée en flexion

Nous commençons dans un premier temps à résoudre théoriquement le problème $\mathcal{M}4-2n+1P$ et $\mathcal{M}4-5n$. On comparera dans la suite les résultats obtenus pour un empilement de trois couches en traction, grâce à notre outil avec ceux obtenus par un calcul éléments finis.

3.2.2. Problème de flexion par le modèle $\mathcal{M}4-2n+1$ Plaque

Récapitulatif des équations principales bidimensionnelles

Avec le modèle $\mathcal{M}4-2n+1P$, les hypothèses et les équations applicables au problème sont :

Déplacements généralisés :

Avec l'hypothèse uniaxiale, le problème bi dimensionnel est donc indépendant à y . Les équations (3.27) deviennent :

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \begin{bmatrix} u^1(x) \\ u^2(x) \\ \dots \\ u^n(x) \end{bmatrix} \\ U_3 &= w(x) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Déformations généralisées :

Les efforts généralisés du modèle $\mathcal{M}4-2n+1P$ sont associés respectivement aux déformations généralisées dans l'équation (3.28) exprimées ci-dessous :

$$\begin{cases} \epsilon^i = \frac{d}{dx} u^i(x) \\ \chi^i = \frac{d}{dx} \phi^i(x) = \frac{d^2}{dx^2} w(x) = \chi \\ D^{j,j+1} = u^{j+1}(x) - u^j(x) - \frac{e^j - e^{j,j+1}(x)}{2} \phi(x) \end{cases} \quad (3.31)$$

En effet, seul $w(x)$ la flèche moyenne étant considérée dans ce modèle, les courbures sont identiques dans toutes les couches.

Loi de comportement

En notant, en fonction des modules d'ingénieur, les expressions des composantes du tenseur des souplesses de chacune des couches :

$$\underline{\underline{S}}^i = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1^i} & -\frac{\nu_{12}^i}{E_1^i} & -\frac{\nu_{13}^i}{E_1^i} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}^i}{E_2^i} & \frac{1}{E_2^i} & -\frac{\nu_{23}^i}{E_2^i} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}^i}{E_3^i} & -\frac{\nu_{32}^i}{E_3^i} & \frac{1}{E_3^i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}^i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}^i} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Les équations (3.29) se réécrivent :

$$\frac{d}{dx} u^i(x) = \frac{N_{11}(x)}{e^i E^i} \quad (3.33)$$

$$\chi = \frac{12}{(e^i)^3 E^i} M^i(x) \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} u^{i+1}(x) - u^i(x) + \frac{e^{i+1} + e^i}{2} \phi(x) \\ = \frac{1}{6} \frac{e^i}{G^i} \tau^{i-1,i} + \frac{1}{6} \frac{e^{i+1}}{G^{i+1}} \tau^{i+1,i+2} + \frac{1}{3} \left(\frac{e^i}{G^i} + \frac{e^{i+1}}{G^{i+1}} \right) \tau^{i,i+1} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Les équations d'équilibre :

Les équations d'équilibre (3.25) se réécrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} N^i(x) + (\tau^{i,i+1}(x) - \tau^{i-1,i}(x)) = 0 \\ \sum_{i=1}^n \left(\frac{e^i}{2} \frac{d}{dx} (\tau^{i,i+1}(x) + \tau^{i-1,i}(x)) + \frac{d^2}{dx^2} M^i(x) \right) + q(x) = 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

Pour écrire les équations sous la forme matricielle, nous allons tout d'abord définir des vecteurs et des matrices intervenant dans le problème :

Les vecteurs d'inconnus dans le problème sont :

Vecteur de déplacements membranaires :

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \dots \\ u^n \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Vecteurs des efforts membranaires :

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N^1 \\ N^2 \\ \dots \\ N^n \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Vecteurs des contraintes de cisaillement d'interface :

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \tau^{1,2} \\ \tau^{2,3} \\ \dots \\ \tau^{n-1,n} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Nous définissons les vecteurs et les matrices supplémentaires, qui sont :

Vecteur des épaisseurs :

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} e^1 \\ e^1 \\ \dots \\ e^n \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Matrice des rigidités membranaires :

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} e^1 E^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^2 E^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^n E^n \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Matrice des souplesses du cisaillement :

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \left(\frac{e^1}{G^1} + \frac{e^2}{G^2} \right) & \frac{1}{6} \frac{e^2}{G^2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{6} \frac{e^2}{G^2} & \frac{1}{3} \left(\frac{e^2}{G^2} + \frac{e^3}{G^3} \right) & \frac{1}{6} \frac{e^3}{G^3} & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \frac{e^3}{G^3} & \frac{1}{3} \left(\frac{e^3}{G^3} + \frac{e^4}{G^4} \right) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{3} \left(\frac{e^{n-1}}{G^{n-1}} + \frac{e^n}{G^n} \right) \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Matrice supplémentaire:

$$\underline{\underline{A}}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{A}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

On rappelle que $w(x)$ le champ de déplacement vertical est identique pour toutes les couches. Un seul scalaire $\phi(x)$ est nécessaire pour décrire $w^i(x)$, $\phi^i(x)$, $\chi^i(x)$.

Les équations de comportement s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \underline{\underline{K}} \frac{d}{dx} \underline{U} - \underline{N} = 0 \\ \sum_{i=1}^n M^i = \frac{\sum_{i=1}^n (e^i)^3 E^i}{12} \frac{d}{dx} \phi \end{cases} \quad (3.44)$$

$$\underline{\underline{A}}_1 \underline{U} + \frac{1}{2} \phi \underline{\underline{A}}_2 \underline{e} = \underline{\underline{G}} \underline{T} \quad (3.45)$$

Les équations d'équilibre sont :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \underline{N} - {}^T \underline{\underline{A}}_1 \underline{T} = 0 \\ {}^T (\underline{\underline{A}}_2 \underline{e}) \frac{d}{dx} \underline{T} + \frac{d^2}{dx^2} \sum_{i=1}^n M^i + q(x) = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

$$\underline{\underline{A}}_1 \underline{U} + \frac{1}{2} \phi \underline{\underline{A}}_2 \underline{e} = \underline{\underline{G}} \underline{T} \quad (3.47)$$

Établissement du système d'équations

Avec $\underline{\underline{G}}$ toujours inversible, nous avons :

$$\underline{T} = \underline{\underline{G}}^{-1} \left(\underline{A_1} \underline{U} + \frac{1}{2} \phi \underline{A_2} \underline{e} \right) \quad (3.48)$$

Remplacer (3.48) dans la première équation du (3.46), on a :

$$\underline{\underline{K}} \frac{d^2}{dx^2} \underline{U} - {}^T \underline{A_1} \underline{\underline{G}}^{-1} \left(\underline{A_1} \underline{U} + \frac{1}{2} \phi \underline{A_2} \underline{e} \right) = 0 \quad (3.49)$$

Remplacer (3.44) et (3.48) dans la deuxième équation (3.46) en posant :

$$R_M = \frac{\sum_{i=1}^n (e^i)^3 E^i}{12} \quad (3.50)$$

On obtient :

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{d}{dx} \phi - \frac{1}{R_M} {}^T (\underline{A_2} \underline{e}) \underline{\underline{G}}^{-1} \left(\underline{A_1} \frac{d}{dx} \underline{U} + \frac{1}{2} \underline{A_2} \underline{e} \frac{d}{dx} \phi \right) - \frac{1}{R_M} q(x) = 0 \quad (3.51)$$

Après l'intégration :

$$\frac{d^2}{dx^2} \phi - \frac{1}{R_M} {}^T (\underline{A_2} \underline{e}) \underline{\underline{G}}^{-1} \left(\underline{A_1} \underline{U} + \frac{1}{2} \underline{A_2} \underline{e} \phi \right) - \frac{1}{R_M} \int q(x) dx + C^{te} = 0 \quad (3.52)$$

Pose \underline{X} le vecteur d'inconnu des déplacements :

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \phi \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Nous obtenons le système d'équations différentielles final :

$$\frac{d^2}{dx^2} \underline{X} - \underline{\underline{C_s}} \underline{X} = \underline{F}$$

(3.54)

Où

$$\underline{\underline{C_s}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}} {}^T \underline{A_1} \underline{\underline{G}}^{-1} \underline{A_1} & \frac{1}{2} \underline{\underline{K}} {}^T \underline{A_1} \underline{\underline{G}}^{-1} \underline{A_2} \underline{e} \\ \frac{1}{R_M} {}^T (\underline{A_2} \underline{e}) \underline{\underline{G}}^{-1} \underline{A_1} & \frac{1}{2} \frac{1}{R_M} {}^T (\underline{A_2} \underline{e}) \underline{\underline{G}}^{-1} \underline{A_2} \underline{e} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \int q(x) dx + C^{te} \end{bmatrix}$$

Pour écrire le système de manière adimensionnelle, posons :

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} e^1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & e^n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \underline{X} = \underline{\underline{P}} \underline{X}_0 \quad (3.56)$$

Nous obtenons :

$$\frac{d^2}{dx^2} \underline{X}_0 - (\underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{C}}_s \underline{\underline{P}}) \underline{X}_0 = \underline{F} \quad (3.57)$$

Ou bien

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2} \underline{X}_0 - \underline{\underline{C}} \underline{X}_0 = \underline{F}} \quad (3.58)$$

La résolution de l'équation (3.58) donnera tous les champs de déplacements adimensionnalisés $\underline{X}_0 = \begin{bmatrix} u_0^1(x) \\ \vdots \\ u_0^n(x) \\ \phi(x) \end{bmatrix}$.

Les champs des efforts généralisés sont déterminés par les équations (3.44).

Les champs des cisaillements d'interface sont déterminés par les équations (3.48)

A noter que la matrice $\underline{\underline{C}}$ est singulière, le rang de $\underline{\underline{C}}$ est de $(n-1)$. Sa dimension est $n+1$, $\underline{\underline{C}}$ présente donc 2 valeurs propres nulles. La résolution détaillée de l'équation (3.58) sera présentée dans l'annexe.

Conditions aux limites

Nous avons au total $2(n+1)+1$ coefficients d'intégration à déterminer, qui correspondent aux $2(n+1)+1$ conditions aux limites.

$$\begin{cases} \underline{U}^d(x) = \underline{U}^d \\ \frac{d}{dx} \underline{U}^d(x) = \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{T}^d \\ \phi^d(x) = \phi^d \\ {}^T \left(\underline{\underline{N}}_2 \underline{\underline{e}} \right) \underline{\underline{G}}^{-1} \left(\underline{\underline{N}}_1 \underline{U} + \frac{1}{2} \phi \underline{\underline{N}}_2 \underline{\underline{e}} \right) + R_M \frac{d^2}{dx^2} \phi = Q_3^d \end{cases} \quad (3.59)$$

Solution analytique

Nous pouvons analytiquement résoudre le problème du modèle $\mathcal{M}4-2n+1P$ qui se présente sous forme d'un système d'équations différentielles d'ordre 2. Pour le faire, nous réalisons une décomposition LU de la matrice $\underline{\underline{C}}$ en intégrant 2 fois les deux dernières équations, la dépendance de $\phi(x)$ et $\underline{u}_0^n(x)$ sur les $n-1$ champs de déplacements membranaires sera déterminée. En les remplaçant dans leurs $n-1$ équations, nous obtiendrons un système équivalent qui est régulier. La solution générale est composée d'une solution homogène et une particulière.

Les champs de solution sont composés d'un polynôme qui correspond à la solution du modèle de poutre Bernoulli, et d'une somme exponentielle des parties couplées engendrées par les effets de bords (y compris d'éventuelles fissures transverses, détaillé dans le chapitre suivant).

Les constantes d'intégration seront déterminées en ajoutant les conditions aux limites. Après avoir trouvé les champs de déplacements et de rotation, les champs des cisaillements d'interface sont alors déterminés par (3.48).

Conclusion

Nous avons trouvé la solution analytique d'une poutre multicouche fléchie avec le modèle $\mathcal{M}4-2n+1P$. Cette solution est simple et permet de simuler rapidement les structures multicouches en regardant les champs de cisaillement d'interface. Cependant, dans les structures sandwichs, notamment les structures bois-composites où les matériaux sont très souples et peu résistants dans la direction transversale des fibres, il faut sans doute mieux approcher les efforts d'arrachement, qui sont avec les cisaillements, responsables des ruptures mode I et mode mixte. Dans la suite, nous allons résoudre donc le même problème en utilisant le modèle $\mathcal{M}4-5n$ qui est beaucoup plus performant que son cousin $\mathcal{M}4-2n+1P$.

3.2.3. Résolution analytique avec le modèle 5n bidimensionnel

Nous allons résoudre le problème général d'une poutre sandwich en utilisant le modèle $\mathcal{M}4-5n$. Supposons les efforts appliqués sur les deux faces (voir Figure 3.5) :

$$\begin{cases} \tau^{0,1} = T^- \\ \tau^{n,n+1} = T^+ \\ v^{0,1} = T_3^- \\ v^{n,n+1} = T_3^+ \end{cases} \quad (3.60)$$

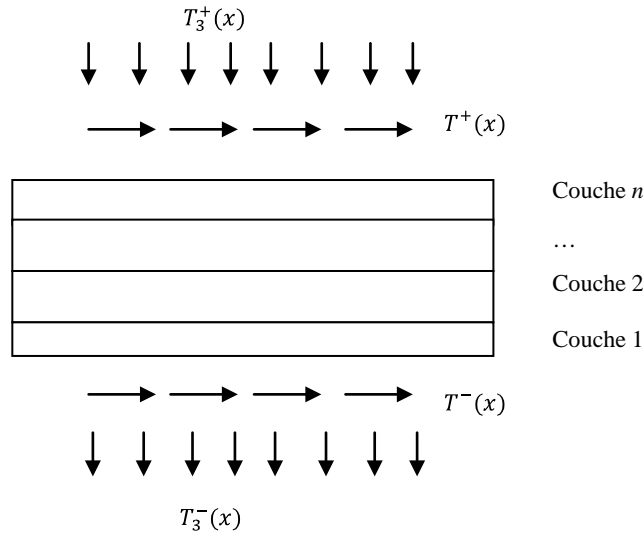


Figure 3.5. Notation de chargement d'un multicouche

Récapitulatif des équations principales bidimensionnelles

Équations de compatibilité :

Les efforts généralisés du modèle $\mathcal{M}4-5n$ sont associés respectivement aux déformations généralisées exprimées ci-dessous :

$$\begin{cases} \varepsilon^i(x) = \frac{d}{dx} u^i(x) \\ \chi^i(x) = \frac{d}{dx} \phi^i(x) \\ d_{\phi}^{j,j+1}(x) = \phi^j(x) + \frac{d}{dx} w^j(x) \\ D^{j,j+1}(x) = u^j(x) - u^{j+1}(x) - \frac{e^j}{2} \phi^j(x) - \frac{e^{j+1}}{2} \phi^{j+1}(x) \\ D_v^{j,j+1}(x) = w^{j+1}(x) - w^j(x) \end{cases} \quad (3.61)$$

Équations de comportement

En notant, en fonction des modules d'ingénieur, les expressions des composantes du tenseur des souplesses de chacune des couches :

$$\underline{\underline{S}}^i = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1^i} & -\frac{\nu_{12}^i}{E_1^i} & -\frac{\nu_{13}^i}{E_1^i} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}^i}{E_2^i} & \frac{1}{E_2^i} & -\frac{\nu_{23}^i}{E_2^i} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}^i}{E_3^i} & -\frac{\nu_{32}^i}{E_3^i} & \frac{1}{E_3^i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}^i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}^i} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Les équations (3.24), de comportement du modèle s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^i = \frac{N^i}{e^i E_{11}^i} \\ \chi^i = 12 \frac{M^i}{(e^i)^3 E_{11}^i} \\ d_\phi^i = \frac{6}{5} \frac{Q^i}{G_{13}^i} - \frac{1}{10} \frac{(\tau^{i,i+1} + \tau^{i-1,i})}{G_{13}^i} \\ D^{j,j+1} = -\frac{1}{10} \frac{Q^{j+1}}{G_{13}^{j+1}} - \frac{1}{10} \frac{Q^j}{G_{13}^j} - \frac{1}{6} \frac{e^j}{G^j} \tau^{i-1,i} \\ \quad + \frac{1}{3} \left(\frac{e^j}{G^j} + \frac{e^{j+1}}{G^{j+1}} \right) \tau^{j,j+1} - \frac{1}{6} \frac{e^{j+1}}{G^{j+1}} \tau^{j+1,j+2} \\ D_v^{j,j+1} = \frac{9}{70} \frac{e^j}{E_{33}^j} v^{i-1,i} + \frac{13}{35} \left(\frac{e^j}{E_{33}^j} + \frac{e^{j+1}}{E_{33}^{j+1}} \right) v^{j,j+1} \\ \quad + \frac{9}{70} \frac{e^{j+1}}{E_{33}^{j+1}} v^{j+1,j+2} \end{array} \right. \quad (3.63)$$

Nous écrivons l'équation pour la couche 1 et l'interface 1,2 afin de mettre en conditions les forces réparties extérieures :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_\phi^1 = \frac{6}{5} \frac{Q^1}{G_{13}^1} - \frac{1}{10} \frac{(\tau^{1,2} + T^-)}{G_{13}^1} \\ D^{1,2} = -\frac{1}{10} \frac{Q^2}{G_{13}^2} - \frac{1}{10} \frac{Q^1}{G_{13}^1} - \frac{1}{6} \frac{e^1}{G^1} T^- \\ \quad + \frac{1}{3} \left(\frac{e^1}{G^1} + \frac{e^2}{G^2} \right) \tau^{1,2} - \frac{1}{6} \frac{e^2}{G^2} \tau^{2,3} \\ D_v^{1,2} = \frac{9}{70} \frac{e^1}{E_{33}^1} T_3^- + \frac{13}{35} \left(\frac{e^1}{E_{33}^1} + \frac{e^2}{E_{33}^2} \right) v^{1,2} + \frac{9}{70} \frac{e^2}{E_{33}^2} v^{2,3} \end{array} \right. \quad (3.64)$$

Similaire pour la couche n et l'interface $n-1$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_\phi^n = \frac{6}{5} \frac{Q^n}{G_{13}^n} - \frac{1}{10} \frac{(\tau^{n-1,n} + T^+)}{G_{13}^n} \\ D^{n-1,n} = -\frac{1}{10} \frac{Q^n}{G_{13}^n} - \frac{1}{10} \frac{Q^{n-1}}{G_{13}^{n-1}} - \frac{1}{6} \frac{e^{n-1}}{G^{n-1}} \tau^{n-2,n-1} \\ \quad + \frac{1}{3} \left(\frac{e^{n-1}}{G^{n-1}} + \frac{e^n}{G^n} \right) \tau^{n-1,n} - \frac{1}{6} \frac{e^n}{G^n} T^+ \\ D_v^{1,2} = \frac{9}{70} \frac{e^{n-1}}{E_{33}^{n-1}} v^{n-2,n-1} + \frac{13}{35} \left(\frac{e^{n-1}}{E_{33}^{n-1}} + \frac{e^n}{E_{33}^n} \right) v^{n-1,n} + \frac{9}{70} \frac{e^n}{E_{33}^n} T_3^+ \end{array} \right. \quad (3.65)$$

Équations d'équilibre (3.15) à (3.17) sont :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} N^i + (\tau^{i,i+1} - \tau^{i-1,i}) = 0 \\ \frac{d}{dx} M^i + \frac{e^i}{2} (\tau^{i,i+1} - \tau^{i-1,i}) - Q^i = 0 \\ \frac{d}{dx} Q^i + (v^{i,i+1} - v^{i-1,i}) = 0 \end{cases} \quad (3.66)$$

L'équilibre de la couche 1 et de la couche n sont alors :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} N^1 + (\tau^{1,2} - T^-) = 0 \\ \frac{d}{dx} M^1 + \frac{e^1}{2} (\tau^{1,2} + T^-) - Q^1 = 0 \\ \frac{d}{dx} Q^1 + (v^{1,2} - T_3^-) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{d}{dx} N^n + (T^+ - \tau^{n-1,n}) = 0 \\ \frac{d}{dx} M^n + \frac{e^n}{2} (T^+ + \tau^{n-1,n}) - Q^n = 0 \\ \frac{d}{dx} Q^n + (T_3^+ - v^{1,2}) = 0 \end{cases} \quad (3.67)$$

Rappelons que nous sommes en train de travailler sur l'hypothèse de contrainte plane. Dans le cas de déformation plane, les modules E_{11}^i doivent être remplacés par $E_{11}^{i(def.plane)} = E_{11}^i \times (1 - v_{12}^i v_{21}^i)$

Établissement du système des équations

Nous définissons maintenant les vecteurs des champs de déplacements et des efforts généralisés qui sont de dimension n :

Champs de déplacement membranaires généralisés :

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} u^1(x) \\ u^2(x) \\ \dots \\ u^n(x) \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Champs de déplacement vertical généralisés :

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} w^1(x) \\ w^2(x) \\ \dots \\ w^n(x) \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Champs de rotation généralisés :

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi^1(x) \\ \phi^2(x) \\ \dots \\ \phi^n(x) \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Champs des efforts membranaires généralisés :

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} N^1(x) \\ N^2(x) \\ \dots \\ N^n(x) \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Champs des efforts tranchants généralisés :

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q^1(x) \\ Q^2(x) \\ \dots \\ Q^n(x) \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Champs des moments de flexion généralisés :

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} M^1(x) \\ M^2(x) \\ \dots \\ M^n(x) \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Les vecteurs des champs des efforts d'interface de dimension $n-1$:

Champs des contraintes de cisaillement d'interface généralisés :

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} \tau^1(x) \\ \tau^2(x) \\ \dots \\ \tau^{n-1}(x) \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Champs des contraintes d'arrachement d'interface généralisés :

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} v^1(x) \\ v^2(x) \\ \dots \\ v^{n-1}(x) \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Les vecteurs supplémentaires des forces réparties sur les faces extérieures sont déduits des équations (3.63) à (3.67) :

Les vecteurs de dimension n :

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} \frac{T^-}{G^1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -\frac{1}{10} \frac{T^+}{G^n} \end{bmatrix} ; \underline{F}_4 = \begin{bmatrix} -T^- \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -T^+ \end{bmatrix} ; \underline{F}_5 = \begin{bmatrix} \frac{e^1}{2} T^- \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \frac{e^n}{2} T^+ \end{bmatrix} ; \underline{F}_6 = \begin{bmatrix} -T_3^- \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ T_3^+ \end{bmatrix} ; \quad (3.76)$$

Les vecteurs de dimension $n-1$:

$$\underline{F}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{30} \frac{e^1}{G^1} T^- \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -\frac{1}{30} \frac{e^1}{G^1} T^+ \end{bmatrix}; \quad \underline{F}_3 = \begin{bmatrix} \frac{9}{70} \frac{e^1}{G^1} T_3^- \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \frac{9}{70} \frac{e^n}{G^n} T_3^+ \end{bmatrix}; \quad (3.77)$$

Nous définissons ensuite les matrices des propriétés du problème. La matrice du module d'Young longitudinale et la matrice du module de cisaillement hors plan des couches sont :

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} E_{11}^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_{11}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E_{11}^n \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} G_{13}^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_{13}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & G_{13}^n \end{bmatrix}; \quad (3.78)$$

La matrice de l'épaisseur des couches est :

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} e^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^n \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Les matrices supplémentaires pour décrire le couplage entre des champs :

$$\underline{\underline{A}}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{A}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (3.80)$$

La matrice carrée de dimension $n-1$ des souplesses du cisaillement :

$$\underline{\underline{G}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{30} \left(\frac{e^1}{G_{13}^1} + \frac{e^2}{G_{13}^2} \right) & -\frac{1}{30} \frac{e^1}{G_{13}^1} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{30} \frac{e^1}{G_{13}^1} & \frac{4}{30} \left(\frac{e^2}{G_{13}^2} + \frac{e^3}{G_{13}^3} \right) & -\frac{1}{30} \frac{e^2}{G_{13}^2} & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{30} \frac{e^2}{G_{13}^2} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{4}{30} \left(\frac{e^{n-1}}{G_{13}^{n-1}} + \frac{e^n}{G_{13}^n} \right) \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

La matrice carrée de dimension $n-1$ de la souplesse verticale :

$$\underline{\underline{K}}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{13}{35} \left(\frac{e^1}{E_{33}^1} + \frac{e^2}{E_{33}^2} \right) & -\frac{9}{70} \frac{e^1}{E_{33}^1} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{9}{70} \frac{e^1}{E_{33}^1} & -\frac{13}{35} \left(\frac{e^2}{E_{33}^2} + \frac{e^3}{E_{33}^3} \right) & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{9}{70} \frac{e^2}{E_{33}^2} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{13}{35} \left(\frac{e^{n-1}}{E_{33}^{n-1}} + \frac{e^n}{E_{33}^n} \right) \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

Avant de résoudre analytiquement, nous écrivons les équations du problème sous forme matricielle. Le principe de la résolution est le même de celui qu'on a réalisé avec le modèle $\mathcal{M}4 - 2n+1P$. En total, nous avons 6 vecteurs d'inconnus des champs généralisés dans les couches (3 champs des déplacements et 3 champs des efforts généralisés) et 2 vecteurs d'inconnus des efforts d'interfaces (cisaillements et d'arrachements). En effet, nous pouvons faire disparaître les deux vecteurs des efforts d'interface grâce à leur relation algébrique avec les champs généralisés dans les couches. Ensuite nous allons établir un système d'équations différentielles de premier ordre. Une approximation sera présentée pour la détermination très rapide des valeurs de bords et/ou des valeurs dans les singularités structurales (fissures transverses).

En remplaçant les champs de déformations de (3.61) dans (3.63), nous obtiendrons 3 systèmes d'équations différentielles et 2 systèmes d'équations algébriques. Les équations de comportement dans les couches peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \underline{\underline{U}} - \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{E}}^{-1} \underline{\underline{N}} = 0 \\ \frac{d}{dx} \underline{\underline{\Phi}} - 12 \underline{\underline{P}}^{-3} \underline{\underline{E}}^{-1} \underline{\underline{M}} = 0 \\ \underline{\underline{\Phi}} + \frac{d}{dx} \underline{\underline{W}} - \frac{6}{5} \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{G}}^{-1} \underline{\underline{Q}} + \frac{1}{10} {}^T (\underline{\underline{N}}_2 \underline{\underline{G}}^{-1}) \underline{\underline{T}} + \underline{\underline{F}}_1 = 0 \end{cases} \quad (3.83)$$

Les équations de comportement d'interface sont :

$$\begin{cases} \underline{\underline{N}}_1 \underline{\underline{U}} + \underline{\underline{P}}_1 \underline{\underline{\Phi}} = -\frac{1}{10} \underline{\underline{N}}_2 \underline{\underline{G}}^{-1} \underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{G}}_2 \underline{\underline{T}} + \underline{\underline{F}}_2 = 0 \\ \underline{\underline{N}}_1 \underline{\underline{W}} + \underline{\underline{K}}_3 \underline{\underline{V}} + \underline{\underline{F}}_3 = 0 \end{cases} \quad (3.84)$$

Les équations d'équilibre (3.66) et (3.67) se réécrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \underline{\underline{N}} - {}^T \underline{\underline{N}}_1 \underline{\underline{T}} + \underline{\underline{F}}_4 = 0 \\ \frac{d}{dx} \underline{\underline{M}} + \frac{1}{10} {}^T (\underline{\underline{N}}_2 \underline{\underline{P}}) \underline{\underline{T}} - \underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{F}}_4 = 0 \\ \frac{d}{dx} \underline{\underline{Q}} - {}^T \underline{\underline{N}}_1 \underline{\underline{V}} + \underline{\underline{F}}_6 = 0 \end{cases} \quad (3.85)$$

La définition de $\underline{\underline{G}}_2$ et $\underline{\underline{K}}_3$ montre que ces deux matrices sont inversibles. Nous pouvons donc déterminer la formule de $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{V}}$ en fonction des champs généralisés des déplacements et des efforts dans les couches.

$$\begin{cases} \underline{T} = \underline{G}_2^{-1} \left(\underline{N}_1 \underline{U} + \underline{P}_1 \underline{\Phi} + \frac{1}{10} \underline{N}_2 \underline{G}^{-1} \underline{Q} - \underline{F}_2 \right) \\ \underline{V} = \underline{K}_3^{-1} \left(\underline{N}_1 \underline{W} + \underline{F}_3 \right) \end{cases} \quad (3.86)$$

En les remplaçant dans (3.83) et (3.85), nous faisons alors disparaître les champs des efforts généralisés d'interface :

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{\Phi} \\ \underline{Q} \\ \underline{N} \\ \underline{M} \\ \underline{W} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \underline{C}_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{C}_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{C}_{36} \\ \underline{C}_{41} & \underline{C}_{42} & \underline{C}_{43} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{C}_{51} & \underline{C}_{52} & \underline{C}_{53} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{C}_{61} & \underline{C}_{62} & \underline{C}_{63} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U} \\ \underline{\Phi} \\ \underline{Q} \\ \underline{N} \\ \underline{M} \\ \underline{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_1^* \\ \underline{F}_2^* \\ \underline{F}_3^* \\ \underline{F}_4^* \\ \underline{F}_5^* \\ \underline{F}_6^* \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

ou encore

$$\frac{d}{dx} \underline{Y} + \underline{C}_0 \underline{Y} = \underline{F}^* \quad (3.88)$$

avec,

$$\begin{cases} \underline{C}_{14} = -(\underline{P} \underline{E})^{-1} \\ \underline{C}_{25} = -12 (\underline{P}^3 \underline{E})^{-1} \\ \underline{C}_{36} = {}^T \underline{N}_1 \underline{K}_3^{-1} \underline{N}_1 \\ \underline{C}_{41} = -{}^T \underline{N}_1 \underline{G}_2^{-1} \underline{N}_1 \\ \underline{C}_{42} = \frac{1}{2} {}^T \underline{N}_1 \underline{G}_2^{-1} \underline{N}_2 \underline{P} \\ \underline{C}_{43} = -\frac{1}{10} {}^T \underline{N}_1 \underline{G}_2^{-1} \underline{N}_2 \underline{G}^{-1} \\ \underline{C}_{51} = \frac{1}{2} {}^T (\underline{N}_2 \underline{P}) \underline{G}_2^{-1} \underline{N}_1 \\ \underline{C}_{52} = -\frac{1}{4} {}^T (\underline{N}_2 \underline{P}) \underline{G}_2^{-1} \underline{N}_2 \underline{P} \\ \underline{C}_{53} = \frac{1}{20} {}^T (\underline{N}_2 \underline{P}) \underline{G}_2^{-1} \underline{N}_2 \underline{G}^{-1} - \underline{I} \\ \underline{C}_{61} = \frac{1}{10} {}^T (\underline{N}_2 \underline{G}^{-1}) \underline{G}_2^{-1} \underline{N}_1 \\ \underline{C}_{62} = \underline{I} - \frac{1}{20} {}^T (\underline{N}_2 \underline{G}^{-1}) \underline{G}_2^{-1} \underline{N}_2 \underline{P} \\ \underline{C}_{63} = -\frac{6}{5} \underline{P}^{-1} \underline{G}^{-1} + \frac{1}{100} {}^T (\underline{N}_2 \underline{G}^{-1}) \underline{G}_2^{-1} \underline{N}_2 \underline{G}^{-1} \end{cases} \quad (3.89)$$

et,

$$\begin{cases} \underline{F}_1^* = 0 \\ \underline{F}_2^* = 0 \\ \underline{F}_3^* = -{}^T \underline{N}_1 \underline{K}_3^{-1} \underline{F}_3 - \underline{F}_6 \\ \underline{F}_4^* = -{}^T \underline{N}_1 \underline{G}_2^{-1} \underline{F}_2 - \underline{F}_4 \\ \underline{F}_5^* = \frac{1}{2} {}^T (\underline{N}_2 \underline{P}) \underline{G}_2^{-1} \underline{F}_2 - \underline{F}_5 \\ \underline{F}_6^* = \frac{1}{10} {}^T (\underline{N}_2 \underline{G}^{-1}) \underline{G}_2^{-1} \underline{F}_2 - \underline{F}_1 \end{cases} \quad (3.90)$$

Afin d'écrire le système adimensionnel, posons :

$$\underline{L}_0 = \begin{bmatrix} \underline{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{P} \underline{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{P} \underline{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{P}^2 \underline{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{P} \end{bmatrix} ; \text{ et } \underline{Y} = \underline{L}_0 \underline{X} \quad (3.91)$$

Le système (3.88) devient :

$$\boxed{\frac{d}{dx} \underline{X} + \underline{C} \underline{X} = \underline{F}_0} \quad (3.92)$$

avec,

$$\begin{cases} \underline{C} = \underline{L}_0^{-1} \underline{C}_0 \underline{L}_0 \\ \underline{F}_0 = \underline{L}_0^{-1} \underline{F}^* \end{cases} \quad (3.93)$$

En résumé, nous avons établi le système d'équations différentielles de premier ordre du modèle $\mathcal{M}4\text{-}5n$ bidimensionnel. Ce système classique peut se résoudre avec plusieurs méthodes.

Conditions aux limites

Par rapport au modèle $\mathcal{M}4\text{-}2n+1$, le modèle $\mathcal{M}4\text{-}5n$ présente plus de degrés de liberté. Les conditions aux limites dans le modèle $\mathcal{M}4\text{-}5n$ sont alors plus nombreuses. Mathématiquement, nous avons besoin, pour le modèle $\mathcal{M}4\text{-}5n$ bidimensionnel, de 6 conditions à imposer sur chaque couche, en total représente alors $6n$ conditions, tandis que le nombre conditions du problème $\mathcal{M}4\text{-}2n+1$ (bidimensionnel) est $2(n+1)$.

La résolution du système (3.92) est mathématiquement réalisable avec la connaissance de $6n$ conditions aux bords. Ces conditions sont, soit en effort, soit en déplacement. Autrement dit, à l'extrémité de la couche i , nous devrons imposer 3 conditions qui sont :

$$\begin{cases} \text{la connaissance, soit de } N^i(x = x_d) = N_d^i, & \text{soit de } U^i(x = x_d) = U_d^i, \\ \text{la connaissance, soit de } M^i(x = x_d) = M_d^i, & \text{soit de } \phi^i(x = x_d) = \phi_d^i \\ \text{la connaissance, soit de } Q^i(x = x_d) = Q_d^i, & \text{soit de } W^i(x = x_d) = W_d^i \end{cases} \quad (3.94)$$

Résolution analytique

Généralité

Il existe plusieurs méthodes pour résoudre le problème classique (3.92) : approximation par étapes simples [Euler, Runge Kutta], multi étapes [Adams Bashforth], différences finies [Diaz Diaz, 2001], éléments finis [Nguyen 2004]. Nous allons utiliser une méthode d'approximation de Runge Kutta 4 qui est simple mais donne une précision considérable.

En général, le multicouche $[0, L]$ est divisée en N éléments dans lesquels les champs sont définis grâce à une fonction de forme connue (constants, linéaires, quadratiques...). Ces éléments sont reliés par des nœuds x_p ($p=1..N+1$). En ajoutant les conditions aux limites, ce système différentiel devient linéaire et la résolution est beaucoup moins couteuse.

Une méthode semi-analytique pour le cas sans effort surfacique.

Nous supposons maintenant qu'il n'y a pas de forces surfaciques sur les deux faces du multicouche. Le système (3.92) devient :

$$\frac{d}{dx} \underline{\underline{X}} + \underline{\underline{C}} \underline{\underline{X}} = 0 \quad (3.95)$$

Un des avantages principaux des modèles $\mathcal{M}4$ est de donner des valeurs quantitatives aux bords. Nous nous intéressons alors à une méthode simple permettant de déterminer directement ces valeurs, ou éventuellement, à de positions données (la valeur au milieu de la structure par exemple). La méthode est comme suit :

Soit l'intervalle $[a, b]$ où tous les champs de $\underline{\underline{X}}$ sont continus et dérivables. Nous discrétisons cette intervalle par N segments qui sont alors distingués par $N-1$ nœuds. Les champs de $\underline{\underline{X}}$ dans le segment $[x_{p-1} ; x_p]$ sont approchés avec une fonction linéaire. La dérivée $\frac{d}{dx} \underline{\underline{X}}$ au point milieu $\frac{x_p + x_{p-1}}{2}$ est approchée par :

$$\frac{d}{dx} \underline{\underline{X}} \left(\frac{x_p + x_{p-1}}{2} \right) = \underline{\underline{A}}_p \underline{\underline{X}}(x_p) + \underline{\underline{B}}_p \underline{\underline{X}}(x_{p-1}) \quad (3.96)$$

où $\underline{\underline{A}}_p$ et $\underline{\underline{B}}_p$ sont des matrices constantes dépendant du choix de l'approximation. Par exemple, avec la méthode d'approximation d'Euler :

$$\underline{\underline{A}}_p = -\underline{\underline{B}}_p = \frac{1}{\delta_p} \underline{\underline{I}} \quad \forall p \quad (3.97)$$

où,

$$\delta_p = x_p - x_{p-1} \quad (3.98)$$

La méthode d'Euler est la plus simple mais donne une moindre précision par rapport aux autres méthodes, avec une erreur cumulée de l'ordre de δ_p^2 . Nous utilisons l'approximation de Runge Kutta 4 ayant une précision plus élevée, et une erreur cumulée de l'ordre de δ_p^5 . Par cette méthode, on a :

$$\begin{cases} \underline{\underline{A}}_p = \underline{\underline{I}} - \frac{1}{2} \underline{\underline{C}} = \text{cte} \\ \underline{\underline{B}}_p = -\underline{\underline{I}} + \frac{\delta_p}{6} (\underline{\underline{R}}_1 + 2\underline{\underline{R}}_2 + 2\underline{\underline{R}}_3 + \underline{\underline{R}}_4) - \frac{1}{2} \underline{\underline{C}} \end{cases} \quad (3.99)$$

où:

$$\begin{cases} \underline{\underline{R}}_1 = \underline{\underline{C}} \\ \underline{\underline{R}}_2 = \underline{\underline{C}} \left(\underline{\underline{I}} + \frac{\delta_p}{2} \underline{\underline{R}}_1 \right) \\ \underline{\underline{R}}_3 = \underline{\underline{C}} \left(\underline{\underline{I}} + \frac{\delta_p}{2} \underline{\underline{R}}_2 \right) \\ \underline{\underline{R}}_4 = \underline{\underline{C}} \left(\underline{\underline{I}} + \delta_p \underline{\underline{R}}_3 \right) \end{cases} \quad (3.100)$$

à $x = x_p$, l'équation (3.95) donne:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}}_p + \underline{\underline{B}}_p \underline{\underline{X}}_{p-1} + \underline{\underline{C}} \left(\frac{\underline{\underline{X}}_p + \underline{\underline{X}}_{p-1}}{2} \right) = 0 \quad (3.101)$$

Alors,

$$\underline{\underline{X}}_p = \left(-\underline{\underline{I}} + \frac{\delta_p}{6} (\underline{\underline{R}}_1 + 2\underline{\underline{R}}_2 + 2\underline{\underline{R}}_3 + \underline{\underline{R}}_4) \right) \underline{\underline{X}}_{p-1} \quad (3.102)$$

Ou encore :

$$\underline{\underline{X}}_p = \underline{\underline{M}}_p \underline{\underline{X}}_{p-1} \quad (3.103)$$

Donc, implicitement, (3.102) s'écrit :

$$\underline{\underline{X}}_{N+1} = \prod_{p=N}^1 \underline{\underline{M}}_p \underline{\underline{X}}_1 \quad (3.104)$$

Avec la connaissance des $6n$ conditions aux limites dont $3n$ dans $\underline{\underline{X}}_1$ et $3n$ d'autres dans $\underline{\underline{X}}_{N+1}$, il est facile à résoudre le système d'équations (3.104).

Soit le cas avec une discrétisation homogène où :

$$\delta_p = x_p - x_{p-1} = C^{te} \quad (3.105)$$

qui donne $\underline{\underline{M}}_p = C^{te}$, Alors $\prod_{p=N}^1 \underline{\underline{M}}_p = (\underline{\underline{M}}_p)^N$. Le système (3.104) devient :

$$\underline{\underline{X}}_{N+1} = (\underline{\underline{M}}_p)^N \underline{\underline{X}}_1 \quad (3.106)$$

L'intérêt de la discrétisation homogène est de la réduction du coût de calcul. Un exemple : avec 2^n éléments, il faut réaliser 2^n calculs de produit matriciel pour avoir le résultat numérique de $\prod_{p=2^n}^1 (\underline{\underline{M}}_p)$, tandis que $(\underline{\underline{M}}_p)^{2^n}$ demande au maximum de $2n-1$ calculs. Avec cette méthode analytique, nous ne travaillons que sur les matrices de dimension fixée à $6n \times 6n$, on économise alors énormément de mémoire d'ordinateur.

Récapitulatif des étapes de la résolution

Les étapes de la résolution peuvent être résumées comme suit :

Préparer les données des matériaux et de la géométrie (de (3.78) à (3.81)) et établir la *matrice caractéristique* $\underline{\underline{C}}_0$ du modèle $\mathcal{M}4-5n$ par (3.87)

Choisir N pour déterminer $\underline{\underline{M}}_p$ par (3.99) et calculer $\left(\underline{\underline{M}}_p\right)^N$

Ajouter les $6n$ conditions aux limites (en déplacements et/ou en contrainte) dans le système linéaire (3.106), la résolution de ce système donnera tous les valeurs des efforts et des déplacements généralisés aux bords.

Utiliser la formule (3.86) pour obtenir les valeurs des efforts d'interface.

Conclusion

Nous avons établi une formule analytique pour résoudre le problème de multicouche bidimensionnel utilisant le modèle $\mathcal{M}4-5n$. Étant donné les propriétés et géométrie du multicouche, dans le cas sans effort surfacique, la construction de la matrice $\underline{\underline{M}}_p$ permet de calculer rapidement les valeurs aux points singuliers, y compris les bords libres. La formule établie permet également de simuler les fissures transverses et le délaminage dans un multicouche, ce qui fait l'objet d'une étude dans le prochain chapitre.

3.3. Validation par un calcul éléments finis M4

Nous allons dans cette partie comparer les résultats obtenus par un essai de traction d'un 3 couches de composite / bois avec un code d'éléments finis basé sur le modèle $\mathcal{M}4-5n$, (à l'aide du logiciel MPFEAP (Nguyen T. 2005).

La longueur, la largeur de l'éprouvette sont respectivement $600mm$ et $35mm$. La force statique F appliquée est de $29400N$. Le schéma simplifié de chargement est décrit dans la Figure 3.6.



Figure 3.6. Schéma de calcul de l'essai en traction directe d'un assemblage 3 couches

Les épaisseurs et les modules des couches sont donnés dans le Tableau 2.8

Couche	Epaisseur (mm)	Module d'Young E_{11} (GPa)	Module d'Young E_{33} (GPa)	Module de cisaillement G_{13} (GPa)	Coefficient de Poisson ν
Bois	28	12,3	0,5	0,5	0,35
Carbone	0,5	100	5	5	0,3

Tableau 2.8. Propriétés des matériaux

Nous présentons en comparant ci-dessous nos résultats obtenus. En effet, l'assemblage ci-dessus est étudié pour 2 configurations de maillages différents :

3.7) *Schéma 1 : Tous les couches matérielles sont modélisées par une seule couche modèle (Figure*



Figure 3.7. *Schéma 1*

Grâce à la symétrie géométrique et de chargement, nous ne présentons ci-dessous les résultats de calcul d'efforts généralisés que dans les couches 1 et 2

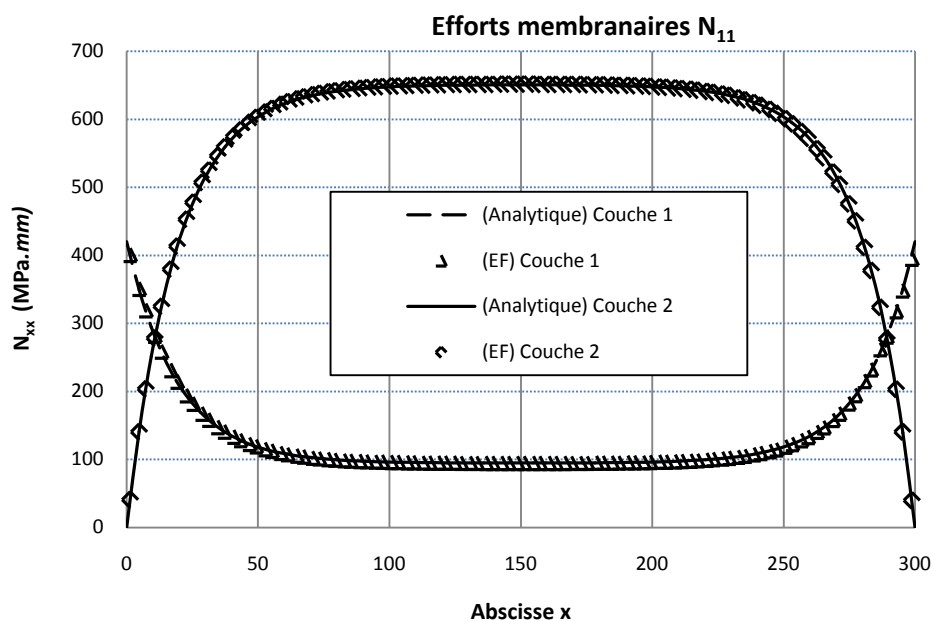
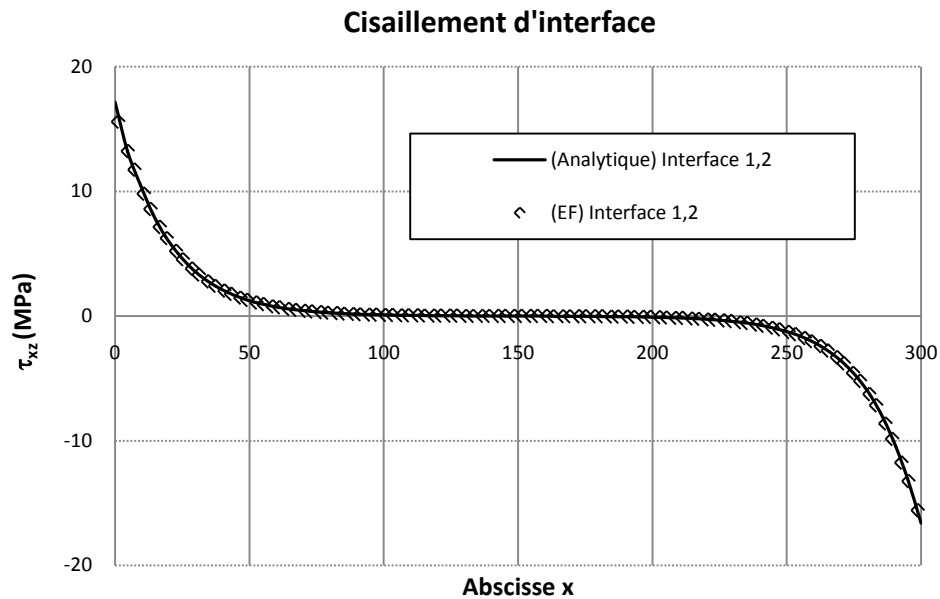


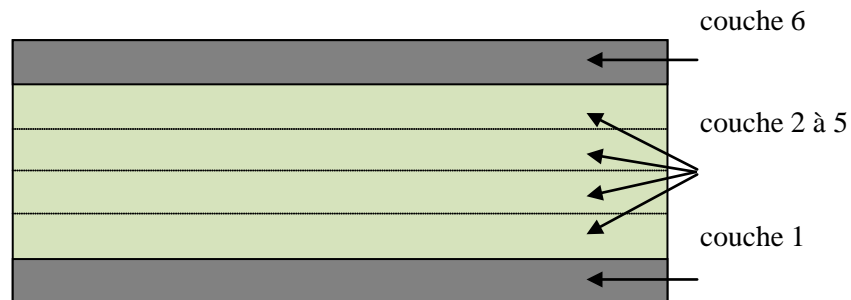
Figure 3.8. *Effort membranaire généralisé N_{11} dans les couches 1 et 2*

Figure 3.9. *Contrainte de cisaillement de l'interface 1,2*

Dans le calcul éléments finis, les efforts sont déterminés aux points de Gauss. Pour déterminer les valeurs aux bords précisément, nous pourrions réaliser un calcul d'interpolation.

Schéma 2 : Les couches « peaux » sont modélisées chacune par une couche modèle. La couche « âme » en bois est modélisé en 4 couches modèles, reliées par des interfaces fictives

Cette configuration est liée à la suite de l'étude où l'on verra qu'il est important pour prédire la rupture de cisaillement de définir un volume élémentaire représentatif qui est conservé lors de l'étude de plusieurs géométries d'éprouvette (plusieurs épaisseurs de bois et de composite)

Figure 3.10. *Configuration 2*

Grâce à la symétrie géométrique et de chargement, nous ne présentons ci-dessous les résultats de calcul d'efforts généralisés que dans les couches 1, 2 et 3.

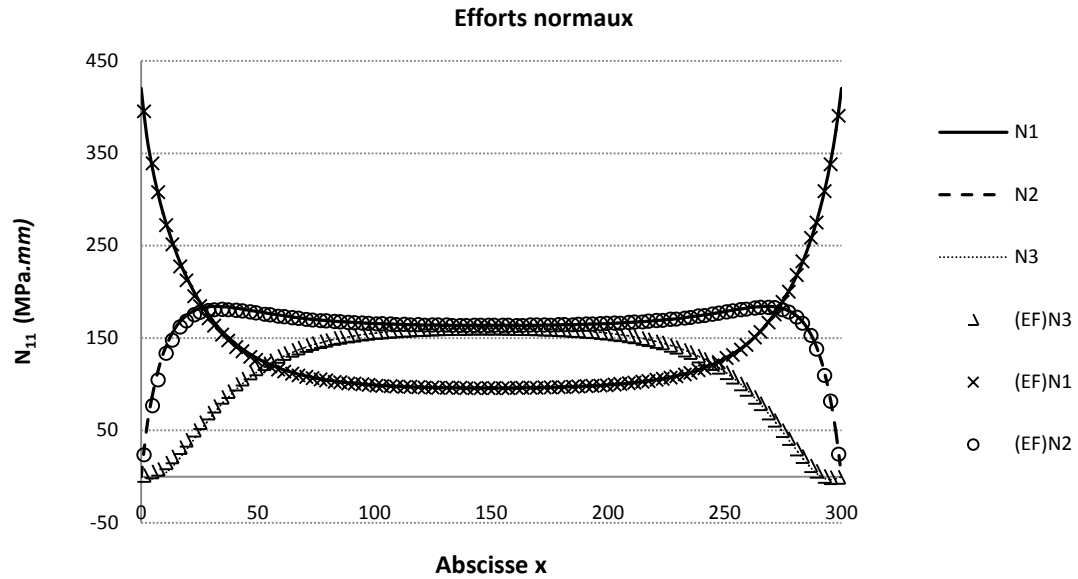


Figure 3.11. Effort membranaire généralisé N_{11i} dans les couches $i, i=\{1, 2 \text{ et } 3\}$

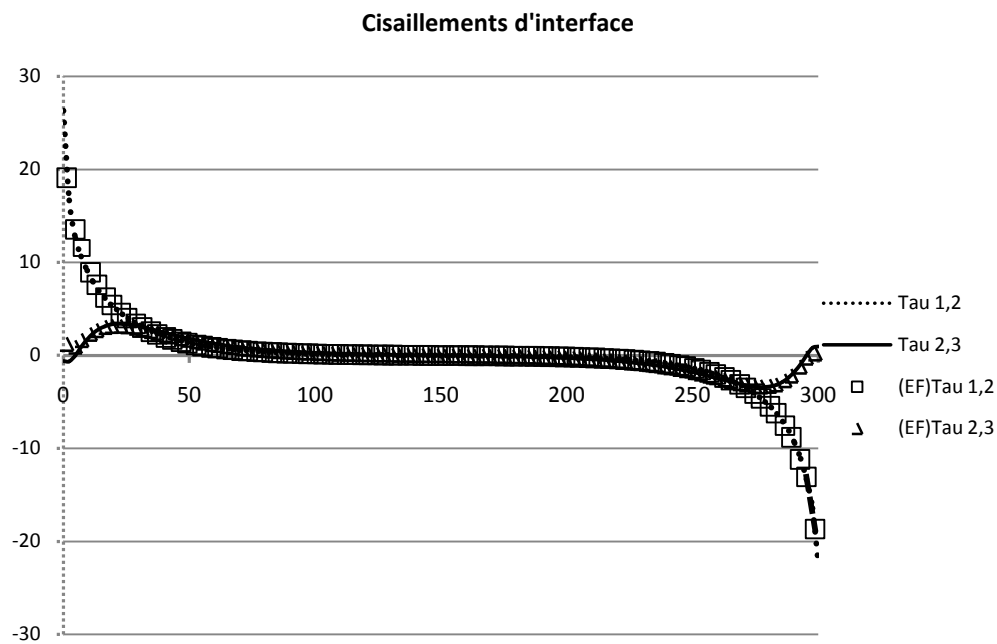


Figure 3.12. Contrainte de cisaillement τ_{xz} de l'interface 1,2 et 2,3

Nous constatons la cohérence entre deux outils de calcul, celui proposé ici et MPFEAP.

En confrontant la Figure 3.9 et la Figure 3.12, on observe que la valeur de la contrainte de cisaillement $\tau_{13}(x)$ d'interface 1,2 change (de 18MPa à 27MPa). On note aussi qu'en créant une interface fictive, on y a naturellement généré une contrainte d'interface. On reviendra sur ces aspects très importants dans la suite. On ne reviendra ici que la validation d'une solution analytique par un modèle numérique validé par ailleurs (Carreira, 2002)

3.4. Conclusion

Dans le but de réaliser des poutres multi renforcées, nous avons souhaité, et afin d'éviter de trop lourdes campagnes d'essais échelle 1, modéliser le multicouche ainsi réalisée, en flexion. Après une bibliographie détaillant les modèles de multicouche existants, nous avons arrêté notre choix sur des modèles *layer-wise* disponibles et permettant le calcul des efforts d'interface.

Nous avons donc établi et validé les résolutions analytiques du problème de multicouche en flexion et/ou en traction en utilisant deux modèles existants, $\mathcal{M}4 - 2n+1P$ et $\mathcal{M}4-5n$. La solution analytique exacte du problème $\mathcal{M}4 - 2n+1P$ a été déterminée. Nous avons également présenté une méthode pour la résolution mathématique d'un système singulier non homogène d'équations différentielles d'ordre 2. Une solution particulière a été trouvée.

Quant au modèle $\mathcal{M}4 - 5n$, une méthode d'approximation utilisant la discrétisation homogène a été présentée, qui permet de déterminer immédiatement les valeurs aux bords sans avoir besoin de calculer les champs dans le multicouche. Avec cette méthode, une matrice s'appelant *matrice caractéristique du multicouche* du problème uni axial a été proposée, ce qui décrit la loi d'écoulement et de couplage des champs de contrainte et de déplacement dans le multicouche, suivant les hypothèses du modèle $\mathcal{M}4 - 5n$. Cette matrice permet donc de déterminer la relation entre les champs généralisés (des efforts et des déplacements) en $x=x_1$ et $x=x_2$ quelconques. Le problème des bords libres, ainsi que le problème de multi fissuration sont alors résolus de manière rapide, aisée et peu coûteuse, qui est bien adopté pour un calcul de bureaux d'étude.

La résolution présentée est simple à réaliser permettant de calculer un multicouche sous différents types de chargements. Elle permet également de simuler le problème de multi fissuration avec la solution exacte.

La résolution a été validée à l'aide d'une comparaison d'un 3 couches avec le calcul éléments finis utilisant le même modèle ($\mathcal{M}4 - 5n$).

On a mis en évidence la dépendance des valeurs des cisaillements aux bords avec le degré de discrétisation dans l'épaisseur. On verra dans le prochain chapitre que cette dépendance permet de prendre en compte l'effet d'échelle sur la rupture.

Chapitre 4. Identification de critère de rupture d'interface dans le renforcement multi-lamellé.

Dans ce chapitre, un critère de délaminage pour les matériaux multicouches élastiques fragiles sera proposé. Ce critère est lié à la modélisation layerwise rappelée dans le chapitre précédent. Dans un second temps ce critère sera identifié puis validé expérimentalement pour des empilements 3 couches bois – carbone.

4.1. Introduction

L'approche élastique est souvent utilisée même pour des matériaux qui ne sont pas purement élastique (par exemple le bois) ; en fait, tout peut être repris par des coefficients de sécurité fiables pour la conception des structures [Salençon, 1983].

En ce qui concerne les critères de délaminage pour les matériaux élastiques fragiles, il nous semble judicieux, avant de les présenter, de rappeler quelques notions générales des critères de rupture classiques qui permettront au lecteur de mieux comprendre les raisons des démarches adoptées pour la prédiction du délaminage dans les matériaux multicouches.

Pour tout critère de rupture, il est indispensable d'évaluer l'état de contraintes dans les matériaux. Parmi les critères de rupture ponctuels les plus simples, on peut citer les critères de Von Mises et Tresca [Lemaitre et Chaboche, 1985] pour les matériaux isotropes ou le critère de Tsai Wu [Tsai et Wu, 1971] pour les matériaux orthotropes. Ces critères portent sur la valeur ponctuelle d'une contrainte effective qui s'exprime en fonction des contraintes dans le matériau. Par conséquent, ce type de critères est inadapté pour le cas de champs de contrainte singuliers (infinis).

Il est très courant d'avoir des contraintes singulières dans les problèmes mécaniques ; cela a lieu, par exemple, en pointe de fissure dans une structure fissurée. Pour le cas de contraintes singulières le critère de rupture peut porter sur les facteurs d'intensité de contrainte [Irwin, 1958]. Pour les structures fissurées, le critère de progression de fissure [Griffith, 1920] portant sur le taux de restitution d'énergie G est souvent utilisé. Le taux de restitution d'énergie est définie par :

$$G = -\frac{\partial W}{\partial \eta} \quad (4.1)$$

Où W définit l'énergie potentielle de la structure pour une longueur de fissure η donnée. Le taux de restitution d'énergie peut être calculé par la méthode de refermeture de fissure [Bui, 1978] : le travail qu'il faut fournir pour refermer la fissure sur une longueur infinitésimale $d\eta$ est égale au taux de restitution d'énergie. Le critère énergétique de Griffith s'écrit :

$$G > G^c \quad (4.2)$$

Où G^c est le taux de restitution d'énergie critique. On peut ainsi, grâce aux travaux d'Irwin et de Griffith, écrire des critères pour le cas de contrainte singulière. Cependant, même avec l'apport d'Irwin et de Griffith, les approches déterministes ne sont pas capables d'expliquer et de prévoir des effets d'échelle observés expérimentalement.

Les effets d'échelle peuvent être, entre autres, de type effet d'échelle de volume. L'effet d'échelle de volume apparaît lorsque des volumes homothétiques cassent pour des niveaux de contrainte différents. C'est le cas par exemple, d'une éprouvette 90₈ qui casse en traction à un niveau de contrainte plus faible qu'une 90₄ [Caron et Ehrlacher, 1997]. Ces effets d'échelle peuvent être expliqués par la théorie statistique de [Weibull, 1952]. Nous trouvons également dans [Laalai, 1995] une démarche très pertinente inspiré de la théorie de Weibull pour modéliser les efforts d'échelle dans des matériaux hétérogènes élastique quasi-fragile. Grâce à son modèle aléatoire et à des simulations numériques, Laalai trouve que la charge de traction critique pour un volume de taille caractéristique L peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma^c > \sigma^0 \times L^{-\alpha} \quad (4.3)$$

Où σ^0 et α étant deux constantes strictement positives à identifier. Plusieurs travaux destinés à la modélisation de l'effet d'échelle pour les matériaux composites unidirectionnels utilisent aussi ce type de formule [Sutherland et al., 1999]. Cependant, cette formule n'est pas valable lorsque le rapport

L /taille de hétérogénéité devient très important, l'effet d'échelle disparaît et la charge critique devient alors constante [Laalai, 1995].

Une étude très détaillée sur les critères de délaminage de matériaux multicouches peut se trouver dans la thèse de Diaz [Diaz Diaz, 2001]. Nous résumons ci-dessous quelques critères couramment utilisés s'appuyant sur une analyse élastique.

Critères en contraintes moyennes

Nous pouvons citer plusieurs travaux ([Whitney et Nuismer, 1974], [Pagano et Soni, 1983], [Kim et Soni, 1984], [Leguillon, 1998], [Marion, 2000] et [Hochard, 2002]) concernant ces critères qui portent sur les moyennes des contraintes $\bar{\sigma}_{i3}$ ($i=1,2$) (sur une longueur caractéristique h à partir du bord $y=b$).

$$\bar{\sigma}_{i3} = \int_{b-h}^b \sigma_{i3} dy \quad (4.4)$$

Critères en facteur d'intensité de singularité

Irwin est le premier à utiliser les facteurs d'intensité de contrainte dans des critères de rupture [Irwin, 1958]. Ces critères s'écrivent sous forme :

$$\left(\frac{K_I}{K_I^C}\right)^l + \left(\frac{K_{II}}{K_{II}^C}\right)^m + \left(\frac{K_{III}}{K_{III}^C}\right)^n = 1 \quad (4.5)$$

Où $K_I^C, K_{II}^C, K_{III}^C$ sont les facteurs d'intensité de contrainte critiques et sont supposés être des grandeurs intrinsèques du matériau.

K_I, K_{II}, K_{III} sont les facteurs d'intensité correspondant aux contraintes $\sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}$ à l'interface.

l, m et n sont des coefficients positifs et sont aussi supposés être des grandeurs intrinsèques du matériau.

Leguillon [Leguillon, 1998] et Chyanbin [Chyanbin, 1995] valident également leur critère basant sur la théorie d'Irwin. Cependant les auteurs n'ont pas pris en compte l'effet d'épaisseur.

Critères énergétiques

Les critères énergétiques utilisent en général la mécanique linéaire de la rupture fondée sur le critère de propagation de fissure Griffith [Griffith, 1920]. Ces critères sont trouvés de type :

$$f\left(\frac{G_I}{G_I^C}, \frac{G_{II}}{G_{II}^C}, \frac{G_{III}}{G_{III}^C}\right) = 1 \quad (4.6)$$

Où G_i et G_i^C ($i = I, II, III$) sont respectivement les taux de restitution d'énergie et celles critique associés au mode de fissuration i . Pour ce type de critères, nous pouvons citer les travaux de [Wang, 1989], [Whitney, 1989], [Guedra-Degeorges, 1993], [Benzeggagh, 1996], [Leguillon, 1999], [Marion, 2000]. On notera le travail de Leguillon [Leguillon, 2001] qui propose un critère intégrant une condition sur la contrainte et une condition énergétique.

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord modéliser le comportement d'interface imparfaite, nous déterminerons ensuite des critères simples de délaminage pour les matériaux élastiques fragiles avec nos modèles M4-5n et M4-2n+1 grâce à une campagne d'essai sur les éprouvettes 3-couches bois-carbone.

4.2. Modélisation de la fissure transverse et du délaminage

Afin de simuler le mécanisme des ruptures progressives, nous présenterons ci-dessous la modélisation de la rupture dans les couches, (fissures transverses) et dans les interfaces (délaminage) d'une structure multicouche. Pour les délaminages, nous utiliserons pour la modélisation des outils développés dans le cadre des modèles M4 pour des interfaces imparfaites ou une description géométrique des fissures.

4.2.1. Modélisation des interfaces imparfaites - Délaminage

En réalité, il est difficile de réaliser une connexion parfaite pour les structures mixtes dans le génie civil. Les poutres mixtes, notamment en bois - béton, présentent souvent un glissement à l'interface entre le bois et le béton, ou entre les lamelles du bois. En effet, plusieurs auteurs ont développé des théories qui permettent d'obtenir des solutions pour ce problème. La thèse de [Pham 2007], puis celle [V.A. Nguyen, 2008] présentent des études théoriques et expérimentales, ainsi que des études bibliographiques très riches sur le problème des interfaces imparfaites. Pham a proposé d'introduire les *raideurs d'interface* dans les modèles M4 en résolvant analytiquement le cas d'une poutre mixte de deux couches bois – béton. Le travail récent de [Blonski, 2009] sur l'expérimentation de la connexion bois - béton a été réalisé afin d'identifier ces raideurs.

Dans la construction du modèle présentée dans le chapitre 3, les interfaces sont définies parfaitement rigide. Dans les poutres mixtes, ce modèle d'interface ne convient pas aux connexions discrètes que présentent souvent un glissement important entre les couches matérielles. Nous reprenons la loi de comportement d'interface proposée par [Pham 2007]

$$\begin{cases} \gamma_\alpha^{j,j+1}(x) = S_\gamma^{j,j+1} \tau_\alpha^{j,j+1}(x) \\ \gamma_3^{j,j+1}(x) = S_3^{j,j+1} \nu^{j,j+1}(x) \end{cases} \quad (4.7)$$

$\gamma_\alpha^{i,j}(x)$ et $\gamma_3^{i,j}(x)$ sont les glissements et déplacement vertical relatif qui sont déterminés par :

$$\begin{cases} \gamma_\alpha^{j,j+1}(x) = u_\alpha^{j+1}(x, h_{j+1}^-) - u_\alpha^j(x, h_j^+) \\ \gamma_3^{j,j+1}(x) = w^{j+1}(x, h_{j+1}^-) - w^j(x, h_j^+) \end{cases} \quad (4.8)$$

$S_\gamma^{j,j+1}$ et $S_3^{j,j+1}$ sont donc les raideurs, respectivement, du cisaillement et de l'arrachement de l'interface $j, j + 1$.

Les équations de compatibilité du modèle M4-5n sont réécrites :

$$\begin{cases} D^{j,j+1}(x) - \gamma^{j,j+1}(x) = u^j(x) - u^j(x) - \frac{e^j}{2} \phi^j(x) - \frac{e^{j+1}}{2} \phi^{j+1}(x) \\ D_\nu^{j,j+1}(x) - \gamma_3^{j,j+1}(x) = w^{j+1}(x) - w^j(x) \end{cases} \quad (4.9)$$

Pour la résolution, nous définissons maintenant les vecteurs de glissement d'interface :

$$\underline{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma^{1,2} \\ \gamma^{2,3} \\ \dots \\ \gamma^{n-1,n} \end{bmatrix}; \quad \underline{\Gamma}_3 = \begin{bmatrix} \gamma_3^{1,2} \\ \gamma_3^{2,3} \\ \dots \\ \gamma_3^{n-1,n} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

et les matrices de souplesses associées :

$$\underline{\underline{S}}_\gamma = \begin{bmatrix} S_\gamma^{1,2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_\gamma^{2,3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & S_\gamma^{n-1,n} \end{bmatrix}; \underline{\underline{S}}_3 = \begin{bmatrix} S_3^{1,2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_3^{2,3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & S_3^{n-1,n} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

En les introduisant aux équations 3.84, nous avons :

$$\begin{cases} \underline{\underline{N}}_1 \underline{\underline{U}} + \underline{\underline{P}}_1 \underline{\underline{\Phi}} = -\frac{1}{10} \underline{\underline{N}}_2 \underline{\underline{G}}^{-1} \underline{\underline{Q}} + (\underline{\underline{G}}_2 + \underline{\underline{S}}_\gamma) \underline{\underline{T}} + \underline{\underline{F}}_2 = 0 \\ \underline{\underline{N}}_1 \underline{\underline{W}} + (\underline{\underline{K}}_3 + \underline{\underline{S}}_3) \underline{\underline{V}} + \underline{\underline{F}}_3 = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

En posant :

$$\boxed{\begin{cases} \underline{\underline{G}}_2^* = \underline{\underline{G}}_2 + \underline{\underline{S}}_\gamma \\ \underline{\underline{K}}_3^* = \underline{\underline{K}}_3 + \underline{\underline{S}}_3 \end{cases}} \quad (4.13)$$

En remplaçant $\underline{\underline{G}}_2$ par $\underline{\underline{G}}_2^* = \underline{\underline{G}}_2 + \underline{\underline{S}}_\gamma$, et $\underline{\underline{K}}_3$ par $\underline{\underline{K}}_3^* = \underline{\underline{K}}_3 + \underline{\underline{S}}_3$, le problème d'interface imparfaite devient celui général que l'on a déjà résolu (c.f chapitre 3)

Si l'interface $j, j + 1$ est parfaite, alors :

$$S_\gamma^{j,j+1} = S_3^{j,j+1} = 0 \quad (4.14)$$

En revanche, le délaminage dans l'interface $j, j + 1$ peut être interprété par une interface infiniment souple. Dans ce cas, nous prenons alors les valeurs grandes pour $S_\gamma^{j,j+1}$ et $S_3^{j,j+1}$.

Une démarche tout à fait similaire est possible pour les utilisateurs du modèle $\mathcal{M}4-2n+1$. En remplaçant $\underline{\underline{G}}$ dans l'équation (3.81) par $\underline{\underline{G}}^* = \underline{\underline{G}} + \underline{\underline{S}}_\gamma$, le problème $\mathcal{M}4-2n+1$ avec les interfaces imparfaites est résolu.

Lorsque l'interface $j, j + 1$ est constituée par un matériau homogène souple (par exemple une colle époxy qui n'est pas totalement durcie) et que son épaisseur $e^{j,j+1}$ est faible, $S_\gamma^{j,j+1}$ et $S_3^{j,j+1}$ peuvent être calculées par :

$$\begin{cases} S_\gamma^{j,j+1} = \frac{e^{j,j+1}}{G_{\gamma 3}^{j,j+1}} \\ S_3^{j,j+1} = \frac{e^{j,j+1}}{E_{33}^{j,j+1}} \end{cases} \quad (4.15)$$

4.2.2. Sous-structuration du stratifié pour modéliser le délaminage

Les délaminages peuvent être aussi modélisés par une sous structuration. La partie supérieure et celle inférieure de l'interface délaminée sont supposées indépendantes, en mettant les conditions de continuité aux extrémités de la fissure d'interface (voir 4).

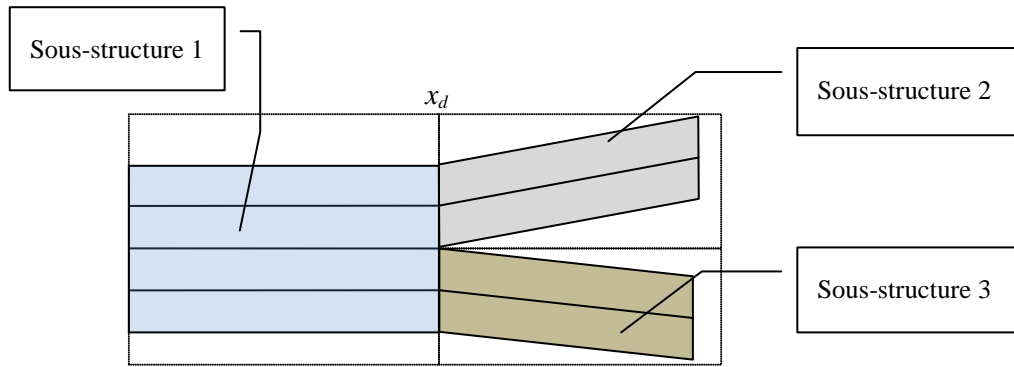


Figure 4.1. Schéma de la modélisation sous structurale : Le multicouche 2 et 3 relie avec celui 1 par les conditions de continuité en $x=x_d$

Avec la résolution présentée dans le paragraphe 3.3.3.4, cette technique est très facile à réaliser, mais elle n'est applicable qu'aux cas où la fissure d'interface s'ouvre. Dans le cas où les « lèvres » de la fissure se ferment, un modèle de contact, avec éventuellement le frottement surfacique doit être sollicité. Néanmoins, pour les études de délaminages en mode I ou mode mixte, l'application de cette technique donne des très bons résultats et des avantages indéniables. Pour nos poutres dont les efforts normaux dans les interfaces sont souvent de type compression, cette modélisation n'est pas proche de la réalité.

4.2.3. Modélisation des fissures transverses

Dans une structure multicouche stratifiée, (bois lamellé collé, composite multi directionnel...), les ruptures peuvent avoir lieu aux nœuds ou aux aboutages qui présentent des résistances variées. Dans un empilement composite multi directionnel, la matrice époxy se fissure le long des fibres dans les plis les moins bien orientées... Ce problème a été étudié par plusieurs auteurs, on trouvera une biblio et des résultats de simulations en statique et en fatigue dans [Caron 97], par exemple.

Si dans une couche, existe une fissure transverse en $x=x_k$ (on suppose qu'elle intéresse toute l'épaisseur de la couche), elle présente une discontinuité structurelle en x_k où les champs de déplacements membranaires, des rotations et des déplacements verticaux sont alors discontinus. Il existe donc un saut des déplacements en $x=x_k$, où les conditions de bord libre (les équations 3.19) sont alors applicables :

$$\begin{cases} N_-^i(x_k) = N_+^i(x_k) = 0 \\ M_-^i(x_k) = M_+^i(x_k) = 0 \\ Q_-^i(x_k) = Q_+^i(x_k) = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

Où $(-)$ et $(+)$ indiquent la partie à gauche et à droite de x_k .

4.2.4. Modélisation de la multi fissuration

La multi fissuration dans un multi couche est l'ensemble des fissures transverses et des fissures d'interface (Figure 4.2)

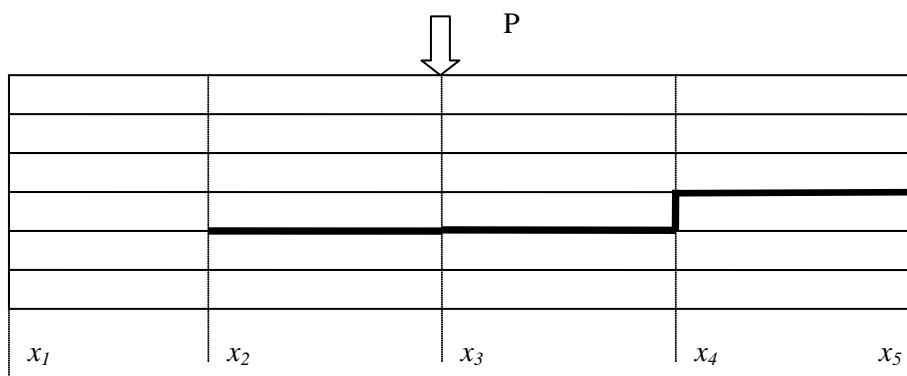


Figure 4.2. Schéma de la modélisation d'une structure multi fissurée

Extrapolons maintenant à une structure sandwich portant m points singuliers x_k . Les points singuliers sont, soit la position d'une fissure transverse ou de l'extrémité d'une fissure d'interface, soit la position d'une charge concentrée ou d'un appui (voir Figure 4.2). Par une discrétisation de $m+1$ segments sur lesquels, l'ensemble des équations (3.94) de conditions continues et discontinues et le système d'équations (3.106), qui sont sous la forme d'un système linéaire de dimension $6n.m \times 6n.m$, devront être résolus. L'utilisation de la technique indiquée dans le paragraphe 3.3.3.5 donnera directement tous les valeurs des inconnus dans ces m coordonnées.

4.3. Identification du critère de rupture d'interface d'un 3-couches bois-carbone

Dans les analyses éléments finis 3D, en présence de singularité des champs de contraintes, il est inutile d'espérer la convergence des champs de contrainte au bord libre, même avec l'augmentation de la finesse de maillage. En utilisant le modèle proposé ici, on s'affranchit à première vue de cette difficulté. En effet le calcul donne une valeur finie sur la lèvres de la fissure pour l'expression du cisaillement d'interface $\tau^{i,i+1}$, au niveau de l'interface bois-béton. Cela s'explique par le raisonnement en grandeurs généralisées et aux intégrations suivant l'épaisseur des couches qui gommement cette singularité. C'est assez similaire aux approches citées dans le paragraphe précédent qui choisissent d'intégrer la contrainte 3D sur une longueur ou volume caractéristique pour introduire le concept de contrainte moyenne (Hochard, 2002). Dans l'approche proposée ici, l'épaisseur de la couche joue ce rôle et permet de donner un sens physique clair au domaine d'intégration. Il est clair que la raideur des couches (c'est-à-dire, à module d'Young donnés, les épaisseurs) influencent directement l'intensité de la contrainte à l'interface. Aussi il est inévitable et naturel de relier la résistance d'une interface à la nature des couches voisines, nature définie par des caractéristiques mécaniques, mais aussi géométriques, c'est-à-dire leur épaisseur.

Ainsi, si on identifie un cisaillement critique, initiant la rupture d'une interface, ce cisaillement critique sera lié à la nature (mécanique et géométrique, l'épaisseur) des plis. Si on change d'épaisseur de pli, on change à priori la valeur du critère (expérimentalement et avec le modèle M4). Ont été testés (Diaz, 2000) des $[10_n, -10_n]_s$ en carbone époxy par exemple, jusqu'à apparition d'un délaminage (rupture d'interface) entre les couches 10 et -10, site de concentration de contrainte de cisaillement. Si l'on considère cet empilement comme un 4-couches dont l'épaisseur des plis est proportionnelle à n , on trouve que la valeur τ_{cr} (critique) calculée est différente pour chaque empilement. τ_{cr} , en l'état n'est pas une donnée intrinsèque de l'interface, mais de l'empilement. Il se peut qu'il n'y ait rien à y faire et que cela en reste ainsi, du à des effets d'échelle, à des tailles de défauts etc....

Il se peut aussi que le modèle permette de mettre en évidence un τ_{cr} intrinsèque à l'interface. Pour que ce τ_{cr} devienne une valeur intrinsèque à l'interface donnée (interface physique entre deux couches physiques de matériau) il faudrait pouvoir vérifier que ce τ_{cr} est identique pour tous les empilements $[10_n, -10_n]_s$ si ils sont maintenant calculés comme un empilement de n couches d'épaisseur unique e . e est l'épaisseur du pli physique. On montre (Diaz, 2000) que si pour chaque empilement $[10_n, -10_n]_s$, $n=1..4$, le calcul modélise chaque couche physique par une couche numérique, le τ_{cr} à l'interface 10/-10 est très proche pour tous les empilements. Ceci montre que, moyennant cette précaution, le modèle rend compte de l'effet d'épaisseur et permet donc de simuler un empilement différent de celui qui a servi à l'identification. Ceci donne du sens à cette valeur finie de la contrainte de cisaillement calculée en pointe de fissure.

C'est ce qu'on se propose de refaire ici dans le cas des poutres bois renforcées par le composite. Plusieurs éprouvettes fissurées (Figure 4.4) sont testées jusqu'à rupture de l'interface bois-composite, avec des épaisseurs de bois et de composites différentes. On modélisera alors ces éprouvettes avec l'outil numérique pour éprouver le caractère intrinsèque ou non de la valeur τ_{cr} ainsi identifiée.

4.3.1. Le problème mécanique considéré

Comme premier exemple d'application considérons un empilement de largeur b , de longueur $2L$ de 3 couches bois/composite en présence d'une fissure verticale et symétrique sur toute l'épaisseur de la couche milieu en bois. L'empilement subit une traction directe P . (Figure 4.3).

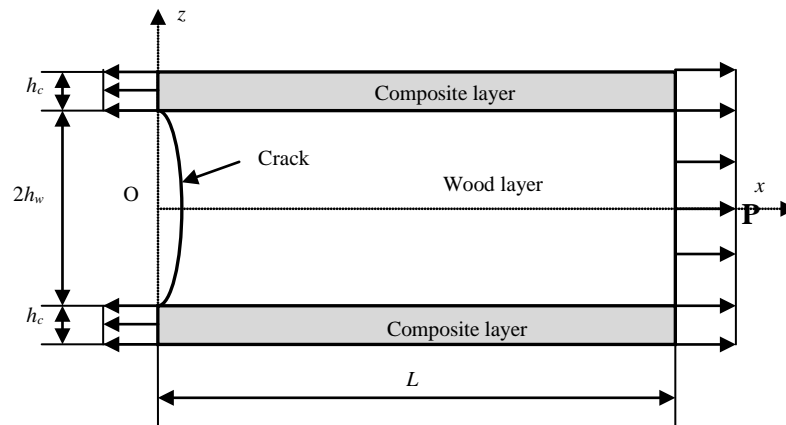


Figure 4.3. Configuration du problème, le multicouche est fixé à $x=L$, avec la symétrie en $x=0$

Analyse avec le M4-2n+1

Nous présentons une analyse en utilisant le modèle M4-2n+1. Grâce à la symétrie en z , en modélisant le multicouche par un 2-couches (une couche du composite et une demi couche du bois), les conditions aux limites sont alors :

$$u_1^1(L) = u_1^2(L) = 0; N_{11}^1(0) = \frac{P}{2b}; N_{11}^2(0) = 0 \quad (4.17)$$

Les inconnus sont :

$$u_1^1(x), u_1^2(x), N_{11}^1(x), N_{11}^2(x) \quad (4.18)$$

En appliquant la méthode présentée dans 3.3.2, le champ de cisaillement d'interface se détermine :

$$\tau_1^{1,2}(x) = 3 \frac{P}{2b \cdot E_c} \frac{\left(\frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_w}\right) e^{-\lambda x}}{\left(\frac{h_c}{G_c} + \frac{h_w}{G_w}\right) \lambda} \quad (4.19)$$

$$\text{avec } \lambda = \sqrt{3 \frac{\frac{1}{h_c E_c} + \frac{1}{h_w E_w}}{\frac{h_c}{G_c} + \frac{h_w}{G_w}}}$$

Où h, G, E sont respectivement l'épaisseur, le module de cisaillement et le module d'Young. L'indice c et w indique respectivement le composite et le bois.

Analyse avec le M4-5n

Les $6n=18$ conditions aux limites sont :

En $x=0$,

$$\begin{aligned} \phi_1^1(0) &= \phi_1^3(0) = 0; \\ Q_1^1(0) &= Q_1^2(0) = Q_1^3(0) = 0 \\ N_{11}^1(0) &= N_{11}^3(0) = \frac{P}{2b}; N_{11}^2(0) = 0 \\ M_{11}^2(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

En $x=L$,

$$\begin{aligned} u_1^1(L) &= u_1^2(L) = u_1^3(L) = 0 \\ Q_1^1(L) &= Q_1^3(L) = 0 \\ M_{11}^1(L) &= M_{11}^2(L) = M_{11}^3(L) = 0 \\ u_3^2(L) &= 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Les 18 inconnus sont alors :

$$\begin{aligned} &u_1^1(0), u_1^2(0), u_1^3(0) \\ &\phi_1^2(0) \quad \phi_1^1(L), \phi_1^2(L), \phi_1^3(L) \\ &\quad Q_1^2(L) \\ &\quad N_{11}^1(L), N_{11}^2(L), N_{11}^3(L) \\ &M_{11}^1(0), M_{11}^3(0) \\ &u_3^1(0), u_3^2(0), u_3^3(0) \quad u_3^1(L), u_3^3(L) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Les résultats seront présentés dans le prochain paragraphe.

4.3.2. Expérimentation

Cinq séries d'éprouvettes multicouches composite - bois symétriques (Figure 4.4) sont réalisées. Dans ces éprouvettes, la couche médiane est séparée par une fissure (*pré-fissure*) sur toute son épaisseur. Des plaques métalliques sont collées aux extrémités pour assurer que la rupture ne se produit qu'au niveau de la *pré-fissure*.

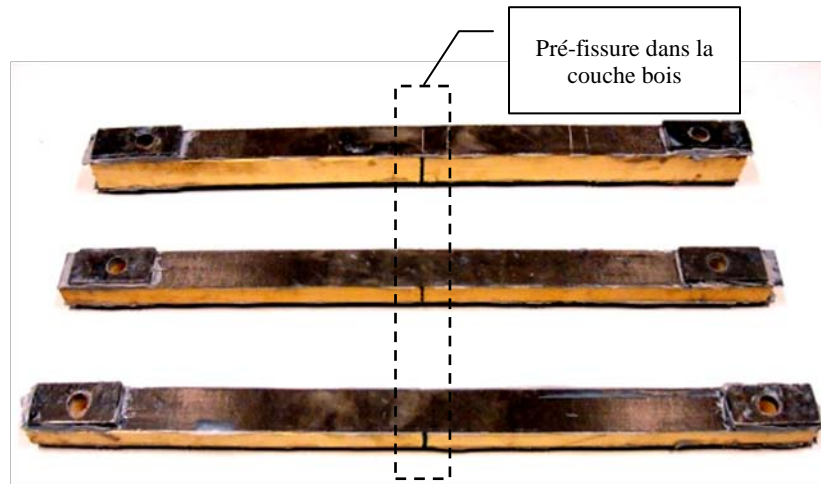


Figure 4.4. Éprouvettes d'essai en traction directe

La couche médiane est en bois *sapin blanc*, les couches *peaux* sont des empilements en tissu carbone époxy. Pour l'assemblage, nous avons utilisé deux types de colle : la *Sikadur 330* et l'*Epolam*. Nous avons observé un mode de rupture cohésif dans la fine couche de bois en contact avec les colles. La résistance en cisaillement des colles choisies est plus élevée que celle du bois, et on notera que le choix de ces deux types de colle du comportement fragile n'influence pas l'identification du critère de rupture.

Les propriétés mécaniques des matériaux sont données dans le 3

Matériau	Dénomination	E11 [GPa]	G13 [GPa]	v13
Bois	(W)	13,1	0,5	0,4
Tissu Carbone	(Ct)	340 (fil)	5	0,35
Sikadur 330	(As)	9,5	4	0,2
Epolam 2014/2015	(Ae)	3	1,2	0,2

Tableau 4.1. Propriétés des matériaux

Et la configuration des séries d'éprouvettes se trouvent dans le Tableau 4.2

Série	1	2	3
Nombre d'échantillons	3	3	3
Âme	W	W	W
Peaux	Ct	Ct	Ct
Colle	As	Ae	Ae

Tableau 4.2. Configuration des séries d'essais

La longueur des échantillons et des plaques métalliques est conçue pour que les champs autour de la fissure soient équivalents au cas d'une traction uniforme. Cette longueur doit être suffisamment grande pour que l'interaction entre les bords libres (y compris la pré-fissure) soit négligeable. En effet, la perturbation des champs de contraintes engendrés par la fissure et par les bords libres diminue très vite, ce qui suit une loi exponentielle où la puissance dépend seulement des épaisseurs et des modules des couches. Nous trouvons ainsi que cette longueur d'influence est environ 5 fois d'épaisseur du bois, soit une longueur totale d'éprouvette variant entre 10cm et 40cm. À cause de la limite de l'espace de travail de la machine, il a été choisi une longueur de 60cm.

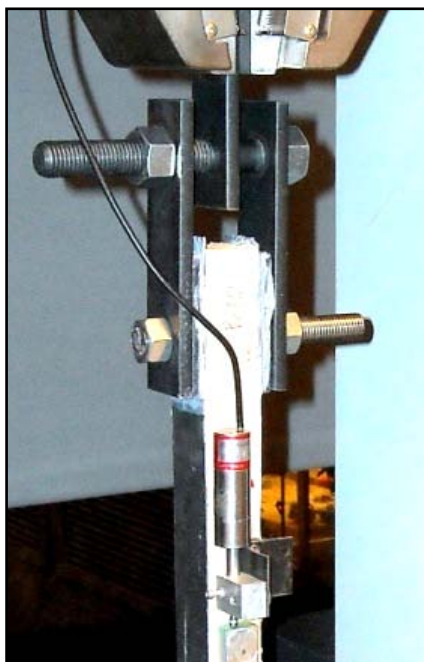


Figure 4.5. *Installation d'un test – Mesure de déplacement*

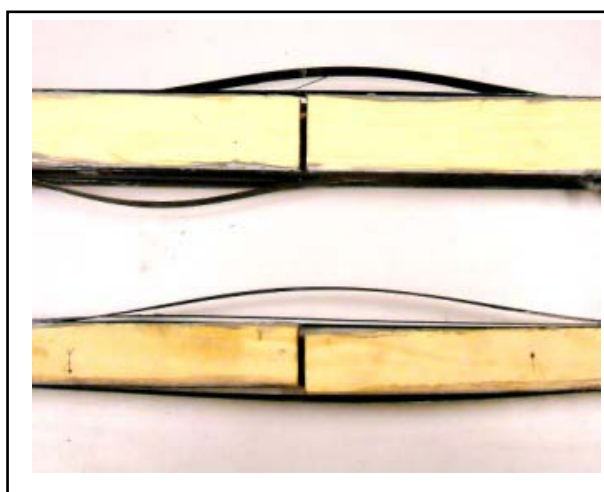


Figure 4.6. *Rupture mode II*

Les essais ont été réalisés par une machine MTS de capacité de 100kN. Nous disposons un capteur de déplacement pour mieux déterminer le point de rupture. Les données sur la force et sur le déplacement sont enregistrées par un système d'acquisition (Figure 4.5).

Les échantillons cassent en mode II dans le bois (Figure 4.6). La rupture brutale commence à la position de fissure, près du point d'interface bois – carbone, et se prolonge le long de la couche bois. Une chute de charge a été remarquée lors de la rupture. Nous ne nous intéresserons pas à la longueur des fissures ainsi qu'à leur progression mais seulement à la force maximale appliquée à la rupture. On trouve dans le Tableau 4.3 les résultats de l'essai.

Série	N°	Épaisseur [mm]		Largeur [mm]	Charge à la rupture [N]	Moyenne	Écartype
		Peau	Âme				
1	1	0,131	13,0	27,7	17455	16298	1168
	2	0,131	13,0	27,7	15120		
	3	0,131	13,0	27,7	16320		
2	1	0,131	27,0	37,5	21206	22084	1754
	2	0,131	26,0	37,3	20942		
	3	0,131	26,9	37,8	24104		
3	1	0,262	26,6	38,0	33514	36516	3605
	2	0,262	27,2	37,9	40514		
	3	0,262	27,2	37,5	35521		

Tableau 4.3. Géométrie des éprouvettes et Résultats bruts

Les niveaux de chargement sont bien évidemment différents compte tenu des sections différentes des éprouvettes. Le modèle proposé dans la partie précédente va être utilisé afin de calculer le cisaillement max lors de l'essai et de tenter d'identifier une valeur intrinsèque de l'interface si elle existe.

4.3.3. Analyse des résultats expérimentaux avec le modèle M4-2n+1

Comme pour les stratifiés $[10_n, -10_n]_s$ de la référence [3], plusieurs modélisations différentes du multicouche vont être réalisées. L'épaisseur de la colle est négligeable et ne sera pas prise en compte dans le maillage. De plus la rupture a toujours lieu dans le bois en contact avec la colle. C'est l'ensemble de cette zone que l'on appelle ici l'interface et que l'on souhaite qualifier.

Le plus évident est de mailler le bois par une couche modèle et le composite par une couche modèle (maillage *c*) dans la Figure 4.7). Le Tableau 4.4 donne la valeur $\tau_{cr}(2n+1)$ pour chaque éprouvette. Il est clair que τ_{cr} calculé ainsi est une caractéristique de l'empilement et non intrinsèque à l'interface. On note cependant une assez bonne répétabilité dans cet essai de rupture.

Série	N°	$\tau_{cr}(2n + 1)$ [MPa]
1	1	20,0
	2	17,2
	3	18,9
2	1	13,6
	2	13,7
	3	15,3
3	1	13,9
	2	16,7
	3	14,8

Tableau 4.4. τ_{cr} calculé avec 1 maille (Figure 4.7.c) – modèle M4-2n+1

Si l'on veut maintenant conserver une taille caractéristique identique pour chaque empilement, des maillages différents de chaque spécimen vont être testés.

L'influence du maillage sur la distribution de contrainte est tout d'abord mise en évidence, pour les différents maillages quelconques de la Figure 4.7

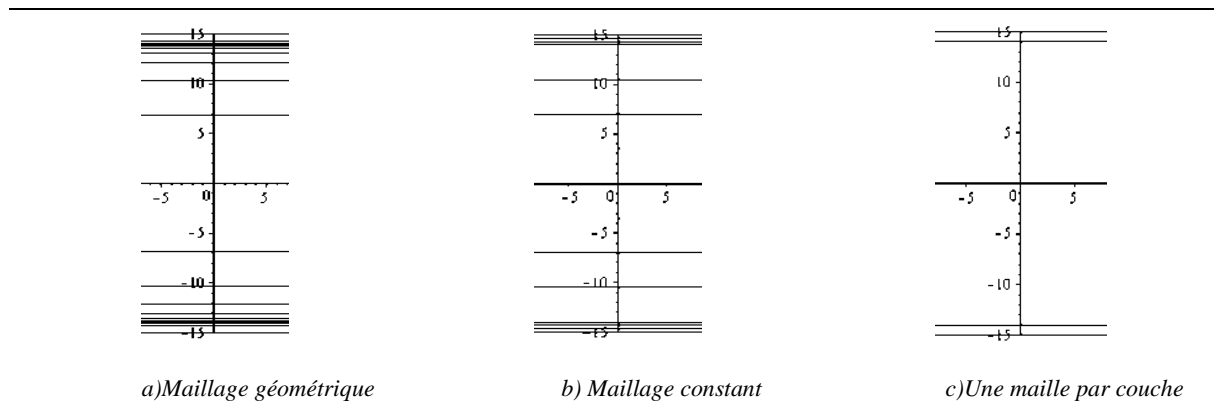


Figure 4.7. Différents maillages du calcul.

Nous nous intéressons aux champs de cisaillement dans l'empilement, notamment dans la couche *âme*, au voisinage de la fissure. Dans la Figure 4.8, l'abscisse horizontale représente une demi épaisseur $z=[-h/2;0]$ avec $z=0$ sur le plan symétrique de la couche bois. L'axe vertical donne les valeurs de la contrainte de cisaillement $\tau_{13}(0,z)$ correspondants aux 3 maillages ci-dessus.

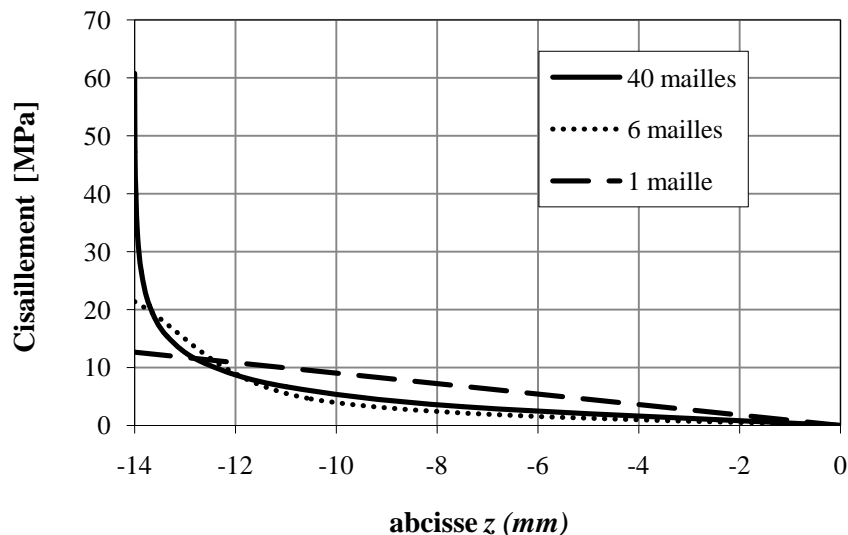


Figure 4.8. Profil de cisaillement dans la demi couche du bois: Empilement 3 couches carbone/bois en traction directe. ($h_w=28$, $h_c=0,5$. $E_w=13060$, $E_c=90000$, $G_w=600$, $G_c=5000$).[N][mm]

Les profils sont assez proches dans la partie centrale, mais la valeur maximum τ_{cr} sur le bord est très dépendante du maillage, et donc peu utile pour proposer un critère, si on en reste là.

Ce qui est proposé ici est de définir une épaisseur de référence, qui est une épaisseur de bois proche de l'interface, cette épaisseur est choisie arbitrairement.

C'est ce qui a été fait, et une méthode de maillage est proposée de la manière suivante :

Une épaisseur caractéristique est choisie, l'épaisseur d'une couche de bois en contact avec l'interface. Si e ($0.131mm$) est une épaisseur caractéristique de la lame carbone, alors la maille de bois en contact est choisie proportionnelle et a pour épaisseur $e_w = r_e \cdot e_c$, on testera ici $10 \cdot e_c$, $40 \cdot e_c$ ou $100 \cdot e_c$. Par exemple sur c) le bois est maillé que par une seule couche

Les autres mailles sont telles que le nombre de maille dans la couche de carbone est $n_c = h_c/e_c$. h_c est l'épaisseur totale de la couche de carbone. Le nombre de couche de bois est $n_w = h_w/e_w$. h_w est

l'épaisseur totale de la couche de bois. Dans le cas où le rapport h_w/e_w n'est pas entier, nous prenons le résidu comme l'épaisseur de la dernière maille qui est la plus loin de l'interface.

Nous calculons, pour chaque éprouvette, la contrainte de cisaillement à la rupture τ_{cr} entre les 2 mailles d'interfaces avec ces 3 *maillages* différents ($r_e=100$; 40; 10).

Ce que l'on constate alors sur le Tableau 4.5 c'est qu'une même valeur de τ_{cr} permet de bien prédire la rupture de tous les échantillons d'épaisseurs différentes, si la même épaisseur caractéristique de bois et de carbone ont été choisie pour toutes les analyses. Cela revient à *proposer ces valeurs* comme caractéristiques intrinsèques des interfaces composite-bois.

Série	N°	Cisaillement calculé [MPa]		
		$r_e=10$	$r_e=40$	$r_e=100$
1	1	45,3	29,5	20,0
	2	38,8	25,3	17,2
	3	42,7	27,8	18,9
	moyenne 1	42,67	27,53	18,7
2	1	41,2	27,1	19,3
	2	41,1	27,0	19,2
	3	46,3	30,4	21,7
	moyenne 2	42,87	28,17	20,07
3	1	38,0	26,0	19,1
	2	46,0	31,5	23,1
	3	40,8	27,9	20,5
	moyenne 3	41,6	28,47	20,09

Tableau 4.5. Valeur de τ_{cr} avec 3 maillages différents

Cette valeur dépend bien sur de l'élément élémentaire représentatif choisi (épaisseur de bois « d'interface »), comme c'est souvent le cas en mécanique linéaire de la rupture, mais cela n'empêche pas de prédire la rupture d'un échantillon à partir de l'identification du critère obtenu sur un échantillon de géométrie différente. C'est exactement ce que l'on demande à un critère de rupture. On remarque que la modélisation du bois par une seule maille donne τ_{cr} plus faible et la plus dispersée (Tableau 3). τ_{cr} augmente ensuite avec la diminution de l'épaisseur de bois de référence.

r_e	10	40	100	Non maillé
Moyenne de τ_{cr} [MPa]	43,8	28,8	20,6	16,4
Variation	13,7%	12,7%	13,0%	20,3%

Tableau 4.6. Synthèse des résultats d'essais

Les représentations statistiques de type Weibull de la Figure 4.9 sont très démonstratives et montrent la cohérence des résultats d'essais. Il est en effet possible de lisser toutes les contraintes à rupture calculées pour les différents échantillons et à partir des résultats d'essais, par une fonction de Weibull, Ceci est généralement le signe que le phénomène physique est correctement capté par le modèle.

On a tracé 3 courbes différentes correspondant chacune à un choix de taille caractéristique r_e différent. Les trois courbes Weibull (de deux paramètres) donnent le même paramètre de forme $\lambda=10$ avec trois valeurs différentes de paramètre d'échelle k ($k_1=21$; $k_2=30$; $k_3=45$). Cela veut dire que la

dispersion du résultat ne dépend pas du choix du maillage de calcul mais que la contrainte de cisaillement au bord libre dépend de l'échelle de calcul qui peut être choisie arbitrairement pour l'identification mais doit être conservée pour l'ensemble des prévisions.

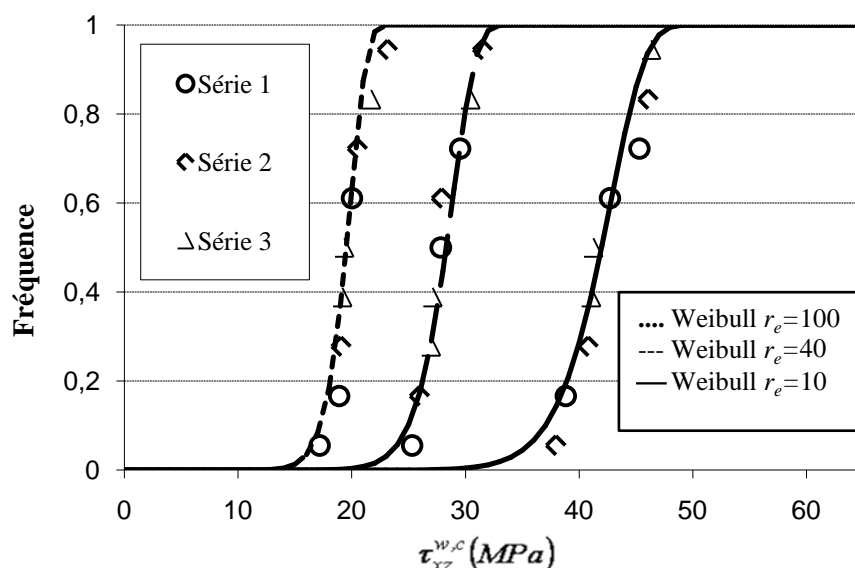


Figure 4.9. Résistance en cisaillement d'interface calculée à partir des résultats expérimentaux – Les courbes de regression de Weibull ont de même facteur de forme $\lambda=10$

Ces résultats amènent à proposer tout naturellement un critère d'initiation de rupture d'interface en contrainte maximale de cisaillement de type :

$$\tau_{xz}^i \leq \tau_{xz}^{i,cr} \quad (4.23)$$

On peut représenter également la pertinence du critère par la Figure 4.10. Tous les essais permettent une identification identique de $\tau_{xz}^{i,cr}$ si la taille de la maille de bois élémentaire est conservée pour l'analyse de tous les échantillons.

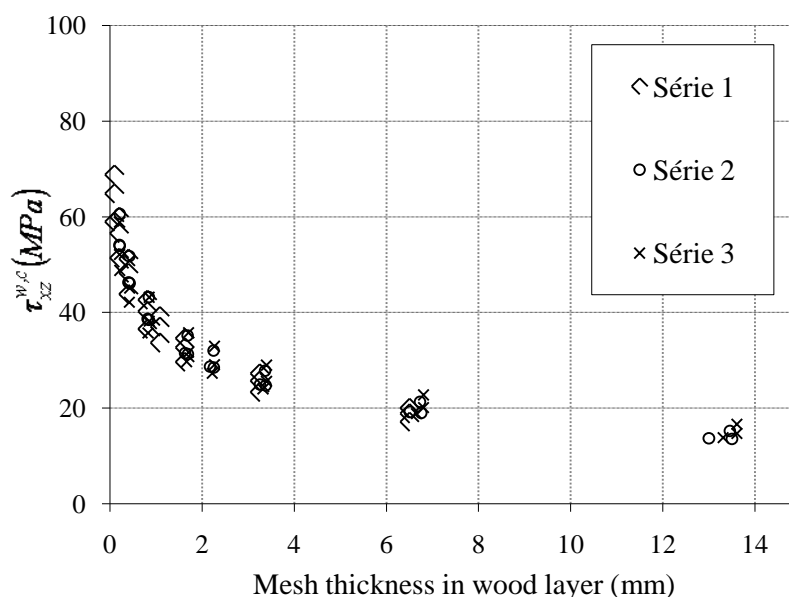


Figure 4.10. Cisaillement critique en fonction de l'épaisseur des mailles de la couche bois

Malgré la dépendance de la valeur maximale de $\tau_{xz}^{i,cr}$ sur le choix du *maillage*, nous avons expérimentalement montré la possibilité de proposer un critère de rupture en contrainte maximum.

Nous souhaitons maintenant établir un outil d'ingénierie permettant de déterminer ce critère dans un tel assemblage avec la connaissance de la géométrie et des matériaux. En effet, le champ de cisaillement d'interface $\tau_{xz}^{1,2}(x)$ a été déterminé pour le cas d'une maille par couche (Figure 4.7a), et l'évolution de ce champ suit une loi exponentielle en x (voir l'équation (4.19)) :

$$\tau_{xz}^{1,2}(x) = P \cdot \frac{3}{2b \cdot E_c} \frac{\left(\frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_w}\right)}{\left(\frac{h_c}{G_c} + \frac{h_w}{G_w}\right)} \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \quad (4.24)$$

$$\text{où } \lambda = \sqrt{3} \sqrt{\frac{\frac{1}{h_c E_c} + \frac{1}{h_w E_w}}{\frac{h_c}{G_c} + \frac{h_w}{G_w}}}$$

En disant qu'un critère est valable pour l'épaisseur unitaire $h_c=1$ et $h_w=1$, nous proposons une formule qui permet d'exprimer τ_{cr} comme une fonction exponentielle de la taille des mailles exprimée ci-dessous :

$$\tau_{cr} = K_\tau \cdot c_1^{-\sqrt{3} \sqrt{\frac{\frac{1}{E_c} + \frac{1}{E_w}}{\frac{1}{G_c} + \frac{1}{G_w}}}} \quad (4.25)$$

où K_τ une constante à identifier, c_1 la dimension physique de la maille dans la couche *âme* (qui est le bois dans notre étude) la plus proche de l'interface. En effet, cette formule donne une très bonne prédiction lorsque les mailles sont identiques.

Une fois identifié le critère de rupture τ_{cr}^{e1} pour l'épaisseur e_1 de l'âme, le critère de rupture pour celle e_2 est alors :

$$\tau_{cr}^{e2} = \tau_{cr}^{e1} \cdot \left(\frac{e_2}{e_1}\right)^{-\sqrt{6} \sqrt{\frac{\frac{1}{E_c} + \frac{1}{E_w}}{\frac{1}{G_c} + \frac{1}{G_w}}}} = \tau_{cr}^{e1} \cdot r_h^{-\sqrt{2}k} \quad (4.26)$$

Où $r_h = \frac{e_2}{e_1}$ est le rapport d'épaisseur. On rappelle que la formule semi-analytique (4.26) n'est valable qu'avec le modèle M4-2n+1. Pour le modèle M4-5n, il est beaucoup plus difficile à déterminer ce type de formule à cause du couplage avec l'arrachement.

En remarquant que les modules du composite (E_c et G_c) sont naturellement très élevés devant ceux du bois (E_w et G_w), on a :

$$k \approx -\sqrt{3} \sqrt{\frac{G_w}{E_w}} \quad (4.27)$$

L'identification de la constante K_τ est présentée dans la Figure 4.11 ci-dessous. L'allure de la courbe de prédiction correspond bien aux résultats expérimentaux.

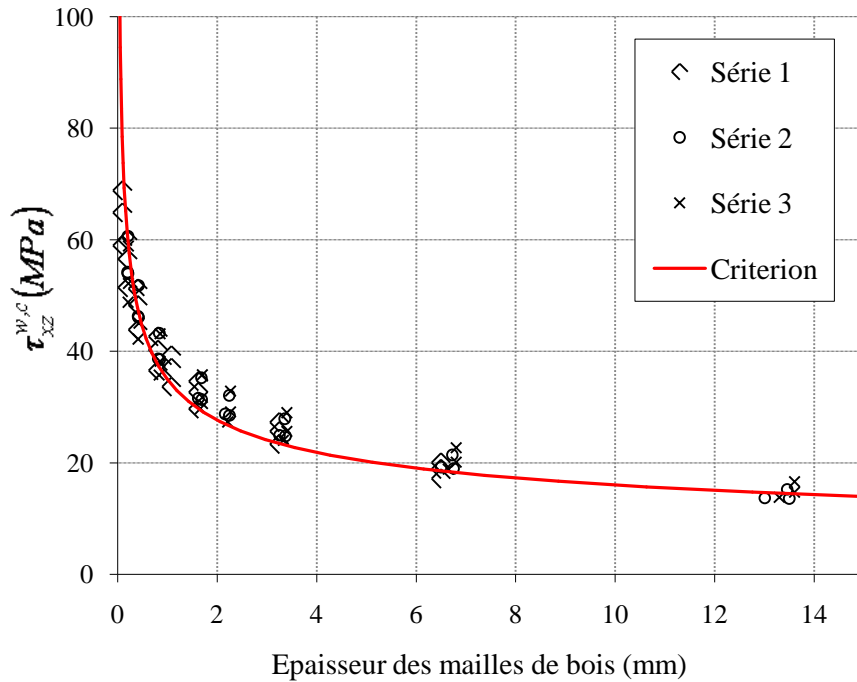


Figure 4.11. Valeur de la contrainte de cisaillement d'interface maximale en fonction de l'épaisseur des mailles de la couche bois. $K_\tau=35$, $k = \sqrt{3}\sqrt{500/13060} \approx 0,3389$

Le critère proposé ci-dessus nous permet donc de prédire rapidement la contrainte de délaminage d'interface d'un assemblage lors du changement d'échelle (épaisseur).

4.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la modélisation des endommagements dans les structures multicouches en utilisant les modèles M4. Les ruptures dans les multicouches sont dues à deux phénomènes principaux : les fissures transverses et les délaminages. Deux méthodes différentes ont été présentées pour la modélisation du délaminage, chacune présente son avantage. Pour les poutres multi couches en flexion, nous avons choisi les modèles des interfaces imparfaites, développés dans la thèse de [Duong, 2008].

Nous avons approfondi dans le problème de bord et de délaminage du bois. Une campagne d'essais de différentes échelles sur les 3-couches bois-carbone ont été réalisés, afin de justifier la possibilité de proposer un critère basant sur la valeur au bord d'une structure multi couche. En utilisant deux modèles M4-5n et M4-2n+1, nous avons montré que les efforts d'interface ont perdu le caractère singulier sur les bords qu'ils ont avec un modèle 3D. Les résultats d'analyse nous encouragent de proposer un critère de rupture pour chaque modèle. Pour les utilisateurs du modèle M4-2n+1, une relation qui relie le changement du critère de rupture avec le changement de l'échelle d'étude a été proposée. Une formule analytique simple permet d'identifier ce facteur d'échelle.

Chapitre 5. Vérification expérimentale du multi-renforcement

L'étude expérimentale sur poutres hybrides bois-BFUP-CFRP, réalisée dans le cadre de ce projet, est présentée dans ce chapitre. Différentes configurations, avec et sans renforcement en CFRP, sont testées. Nous montrons qu'un schéma de multi fissuration peut se développer en flexion, dès lors que la structure est préalablement renforcée en cisaillement et en compression. Des simulations sont présentées, dans lesquelles la distribution spatiale de résistance du bois est obtenue par tirage au sort suivant la méthode de Monté Carlo. La confrontation des résultats expérimentaux aux simulations nous indique que le gain de résistance des poutres renforcées met en exergue 2 phénomènes. Le premier, et le plus attendu, provient des renforts eux-mêmes, lesquels réduisent les tractions dans le bois, grâce à la raideur importante du carbone. Le second effet vient de la propriété qu'a le renforcement de réduire la dispersion de résistance du bois, conformément à ce que nous avons montré dans le chapitre 2.

5.1. Introduction

L'objectif principal de cette campagne consiste à évaluer le potentiel du multi renforcement des poutres en bois lamellé collé par les matériaux composites. Cette phase se situe dans la continuité des résultats obtenus sur tasseaux (chapitre 2), pour lesquels, nous concluons à la nécessité de répondre aux effets d'échelle par la distribution du renforcement sur plusieurs couches.

Pour répondre au problème posé, nous avons d'abord conduit des expériences sur des poutres hybrides de bois lamellé collé (BLC) et BLC renforcé. Pour expliquer l'origine des différences de résistance entre les 2 configurations, nous allons appliquer le modèle de poutres multi fissurées du chapitre 3 pour la configuration des expériences et les critères présentés au chapitre 4. Ce modèle doit être cependant enrichi pour tenir compte des dispersions locales de résistance du bois, suivant une loi statistique de Weibull (présenté dans le chapitre 2). Le modèle sera appliqué dans le but de vérifier si les renforts interviennent uniquement comme réducteur de contraintes de traction dans le bois, ou s'il est de plus nécessaire de modifier la distribution statistique de résistance pour retrouver les résistances moyennes expérimentales.

5.2. Programme expérimental

Ce programme a été supporté par la société SIKA France qui nous a fourni les lamelles de carbone, et l'entreprise de lamellé collé CMBP (Houdan), laquelle nous a fourni le bois (pin sylvestre GL 28, traité classe 4), et a mis à notre disposition un banc de lamellé collé pour une journée.

Dans le programme, nous prévoyons de tester des poutres en flexion, en cherchant à provoquer la rupture en traction par flexion. Pour éviter ainsi les autres modes de rupture (en compression et en cisaillement), nous avons décidé de coller, en partie supérieure du BLC, une lamelle en BFUP, et de renforcer les poutres en cisaillement aux extrémités par collage d'une couche de tissus unidirectionnel de carbone orienté à 45° par rapport à l'horizontale (masse surfacique de 200 g/cm^2).

Douze poutres rectangulaires de $105 \text{ mm} \times 165 \text{ mm} \times 3300 \text{ mm}$ ($l \times h \times L$) en bois lamellé collé ont été fabriquées. Deux modèles de poutres ont été utilisés, avec et sans renfort. Les poutres P1-1 à P1-6 sont celles sans renfort tandis que les P2-1 à P2-6, avec renfort sur 3 couches. Une lamelle en BFUP de 45 mm d'épaisseur a été collée sur chacune des ces poutres par une colle époxy de type Sikadur 30[®] de la société SIKA. Nous avons testé les poutres P1-1 à P1-3 et P2-1 à P2-5, les autres corps d'épreuve étant prévus pour des études ultérieures.

5.3. Propriétés des matériaux

Les détails concernant l'utilisation, la durabilité et la fabrication des matériaux utilisés sont présentés ci-dessous.

5.3.1. Béton fibré ultra performant (BFUP)

Le béton fibré à ultra performance est le BSI (CERACEM[®]) dont nous avons parlé dans le premier chapitre. Pour mieux positionner la plaque de béton à coller sur la poutre en bois, la face supérieure de chaque poutre en bois constitue le fond de coffrage pour couler le béton. Le béton dans chaque poutre vient de la même gâchée, afin d'assurer l'homogénéité des résultats. Les plaques en béton sont décoffrées après 24h puis protégées de la dessiccation par une bâche. Elles seront collées

aux poutres en BLC à une maturité de 15 jours. Les propriétés du BSI étant assez constantes, nous avons repris les caractéristiques données dans les recommandations AFGC [AFGC 02].

Module d'Young longitudinal	65 GPa
Coefficient de Poisson	0,2
Résistance caractéristique en traction directe	9,1 MPa
Résistance caractéristique en compression	150 MPa
Densité	2,7 environ

Tableau 5.1. *Caractéristique du BFUP (BSI®)*

5.3.2. Bois lamellé collé

Le bois utilisé est le Pin Sylvestre, traité pour la classe d'emploi 4, de classe GL28. Le module d'Young longitudinal en compression a été mesuré sur 3 échantillons (tableau Tableau 5.2). Les lamelles brutes ont une épaisseur de 33 mm et une largeur de 95 mm.

échantillon	Module [GPa]
1	14,2
2	13,8
3	13,5
moyenne	13,83

Tableau 5.2. *Module d'Young longitudinal du bois Pin sylvestre*

5.3.3. Composite de fibres de carbone (CFRP)

Le renforcement stratifié des poutres est constitué de plaques de fibres de carbone Carbodur S812. Les propriétés mécaniques de ces composites sont données sur les fiches techniques du fabricant et leurs valeurs sont présentées dans le Tableau 5.3. On indique le type de fibre, l'épaisseur de chaque lamelle, la contrainte ultime, la déformation ultime, le module élastique et la proportion volumique de fibres. Dans le but de vérifier le comportement mécanique du collage en utilisant la colle Polyuréthane, des essais de Pull-Out et Push-Out ont été effectués sur des assemblages lamelles de bois – Carbodur S812. La rupture dans le bois montre que la résistance en cisaillement de l'interface Composite-Bois est plus élevée que celle du bois, ce qui valide l'utilisation de la colle polyuréthane de l'entreprise CMBP pour l'assemblage des poutres hybrides BLC-CFRP en usine.

Des feuilles de tissu de fibres de carbone ont été utilisées pour augmenter la résistance à l'effort tranchant, collées avec une colle Sikadur 330 à base d'époxy.

Module d'Young longitudinale	165 GPa
Résistance en traction	2,8 GPa
Densité apparente	1,5g/cm ³
Largeur × Épaisseur	80 mm × 1,2 mm

Tableau 5.3. *Propriétés du plat Sika Carbodur S812*

5.4. Fabrication des corps d'épreuve

Les lamelles de bois et de carbone sont fabriquées et collées à l'entreprise CMBP (Houdan). Tandis que le coulage du béton, le collage béton-bois et le renforcement en cisaillement sont réalisés à l'UR Navier. Les étapes de fabrication sont détaillées ci-dessous.

5.4.1. Collage de lamelles de bois et de carbone

Les poutres sans renfort sont fabriquées comme indiqué dans le premier chapitre (voir I.1.4). Pour les poutres avec renfort, nous avons manuellement inséré des plaques de carbone entre les lamelles de bois (figure 5.1 et Figure 5.2).

Quatre membres de l'équipe ont participé à cette opération (Wafa Belhak, Sébastien Fonlupt, Robert Le Roy et moi-même). L'assemblage ne pouvait en effet se faire que manuellement afin de positionner correctement les lamelles de carbone entre les lames inférieures de la poutre. Pour coller le carbone sur les lames de bois, nous avons utilisé la colle polyuréthane (PU) utilisée habituellement par l'entreprise. Une fois assemblées, les poutres ont été mises sous presse pendant trois heures, une masse en fonte de plus d'une tonne posée sur l'ensemble maintenant la stabilité de l'assemblage. Ces poutres ont été ensuite rabotées sur les faces latérales par l'entreprise, sur largeur de bois par rapport au carbone permettant ce rabotage sans risque d'abîmer les outils de coupe par un contact avec le carbone.



Figure 5.1. *Lamelles de carbone nettoyées avant encollage*



Figure 5.2. *Insertion manuelle des lamelles de carbone et fixation provisoire par des clous*



Figure 5.3. *Mise sous presse et pose d'une masse en fonte pour stabiliser l'ensemble*



Figure 5.4. *Rabotage des poutres après durcissement de la colle*

5.4.2. Collage du béton sur le bois

Une fois les poutres réceptionnées à l'UR Navier, nous avons procédé au coffrage de la partie bétonnée sur la face supérieure de chaque poutre. Nous avons préalablement recouvert cette face de bande adhésive pour éviter l'adhérence du béton sur le bois. Le béton mis en œuvre est un BFUP que nous avons décoffré après 24h. Les poutrelles béton ainsi obtenues ont été désolidarisées des poutres BLC et laissées ainsi pendant 15 jours pour que le retrait du béton s'opère en grande partie librement (absence de contraintes de retrait empêché après collage). Les poutrelles en BFUP ont alors été collées sur les poutres BLC à l'aide d'une colle époxy de type Sikadur 30.

L'épaisseur de la couche de béton est de 45mm pour toutes les poutres. Le coulage a été réalisé par 3 gâchées. Chaque poutre a été mobilisée comme la dalle de coffrage du coulage, pour faciliter le collage béton – bois après (Figure 5.5).



Figure 5.5. *Coulage du béton BFUP*

Pour assurer que le retrait du béton soit homogène, les plaques de béton sont décoffrées après 24h et sont stockées sous bâche pendant 15 jours avant leur collage sur le bois. La colle Sikadur 30 a été appliquée sur les surfaces du bois et du béton afin d'assurer la continuité du collage. 3 serre-joints sont posés pour éviter le glissement pendant le durcissement de la colle.



Figure 5.6. *Encollage du bois*



Figure 5.7. *Poutres collées en cours de séchage*

5.4.3. Renforcement au cisaillement des poutres

La phase suivante consiste à renforcer l'extrémité des poutres en cisaillement pour éviter une rupture des corps d'épreuve selon ce schéma. Le renfort en cisaillement est réalisé grâce à un composite UD de carbone (tissu unidirectionnel à imprégner). Après application de la colle époxy (Sikadur 330) sur le bois et le béton des extrémités de poutrelles le tissu de fibres de carbone est placé sur la zone encollée, puis marouflé pour l'imprégner.



Figure 5.8. *Renforcement au cisaillement des extrémités des poutres*

La poutre finie et prête à tester est montrée dans la Figure 5.13

5.5. Déroulement des essais

Les essais ont été réalisés à l'UR Navier sur une presse de flexion. Ce bâti a été conçu à l'UR Navier. On dispose d'un groupe hydraulique de marque THEMA concept[®]. Le vérin de capacité 500 kN de même marque que le groupe permet de simuler des chargements cycliques jusqu'à 10 Hz. Le vérin est fixé à un chevêtre rigide porté par 8 tiges de diamètres 30 mm ancrées à une dalle rigide. A la tête du vérin est fixée une rotule pour éviter les efforts horizontaux parasites. Le cadre supérieur est contreventé par 8 tirants.

5.5.1. Montage et instrumentation

Les poutres ayant des dimensions identiques, un seul montage a été donc utilisé pour effectuer les essais. L'instrumentation des corps d'épreuves est constituée de capteurs LVDT de 5 mm, 20 mm et 100 mm de débattement et de jauges de déformation de 20 mm pour le bois et le béton et de 5 mm pour le carbone. Chaque poutre a ainsi été équipée de 12 jauges (sans renforcement) ou 14 jauges (avec renforcement) de déformation selon les cas. Les LVDT disposés sur les appuis permettent de déduire le tassement d'appui de la mesure du capteur central.

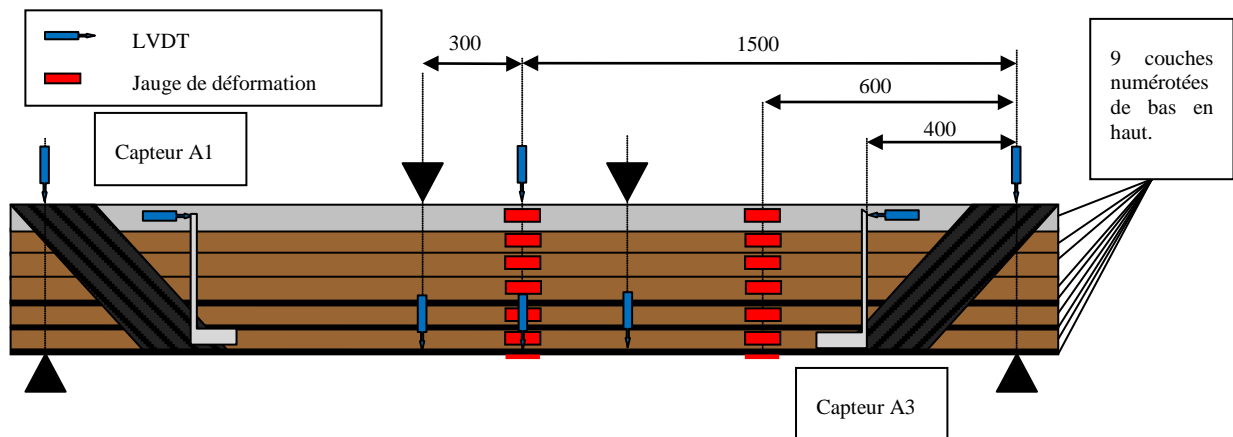


Figure 5.9. *Disposition de l'instrumentation.*

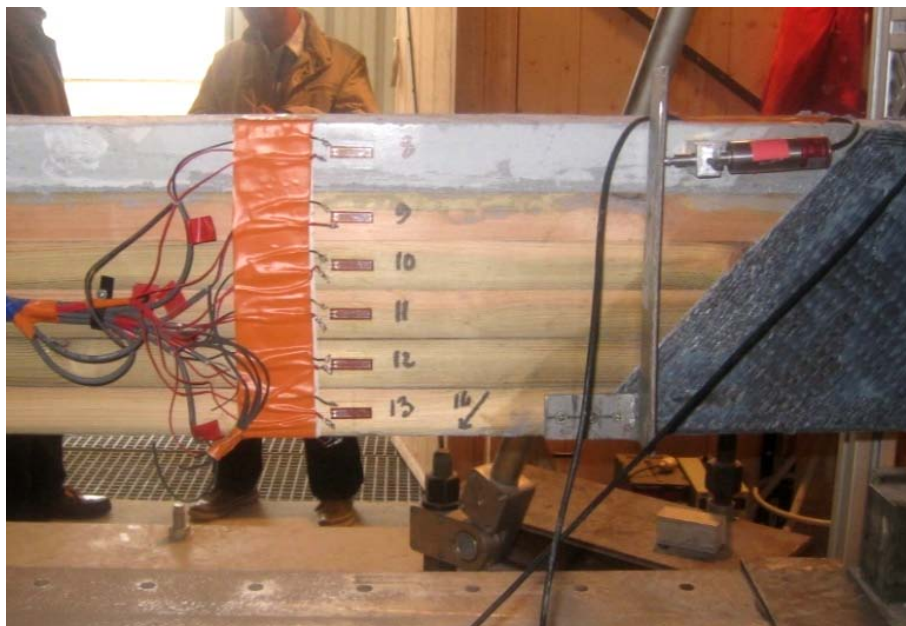


Figure 5.10. *Gauges ex-centrées et capteur LVDT de la mesure de déplacement relatif entre les lamelles extrêmes.*

Une fois la poutre positionnée sur le bâti, les capteurs de déplacement doivent être fixés et les connexions des jauges de déformation ont été soudées aux câbles blindés les reliant à la centrale d'acquisition. L'essai peut démarrer une fois que les vérifications de bon fonctionnement des capteurs sont terminées.

Pour effectuer les essais, les poutres reposent sur deux appuis simples et sont chargées avec un vérin en deux points concentrés espacés de 600 mm (Figure 5.13). Des supports latéraux avaient été installés près des appuis afin d'éviter toute perte de stabilité lors des essais.

5.5.2. Programme de chargement

Chaque scénario débutait par plusieurs cycles de sollicitations dans le domaine élastique et se terminait par la rupture de la poutre :

- Les poutres P1-1 à P1-3 (sans renfort) ont subi trois cycles de 0 à 20kN, puis trois cycles de 0 à 35 kN et enfin un chargement jusqu'à la rupture.

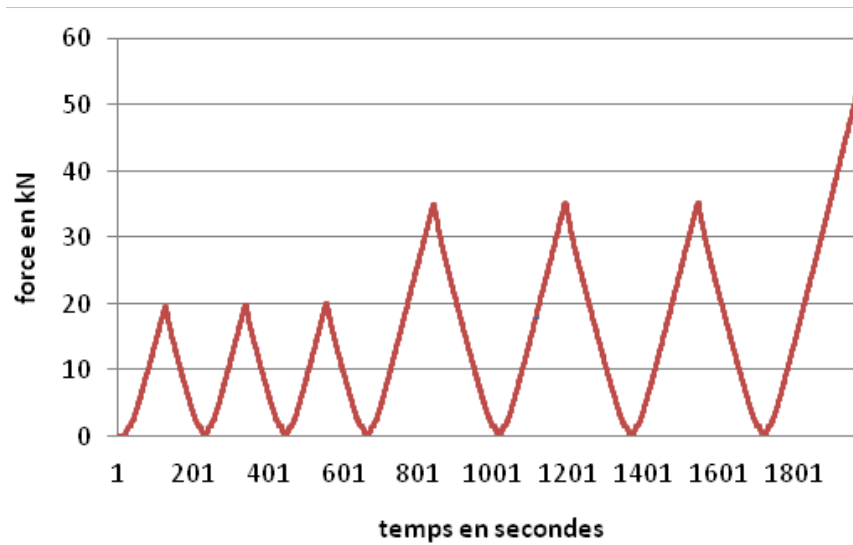


Figure 5.11. *Chargement des poutres non renforcées*

- Les poutres P2-1 à P2-6 (avec renfort) ont subi trois cycles de 0 à 35kN, puis trois cycles de 0 à 50 kN et enfin un chargement jusqu'à la rupture.

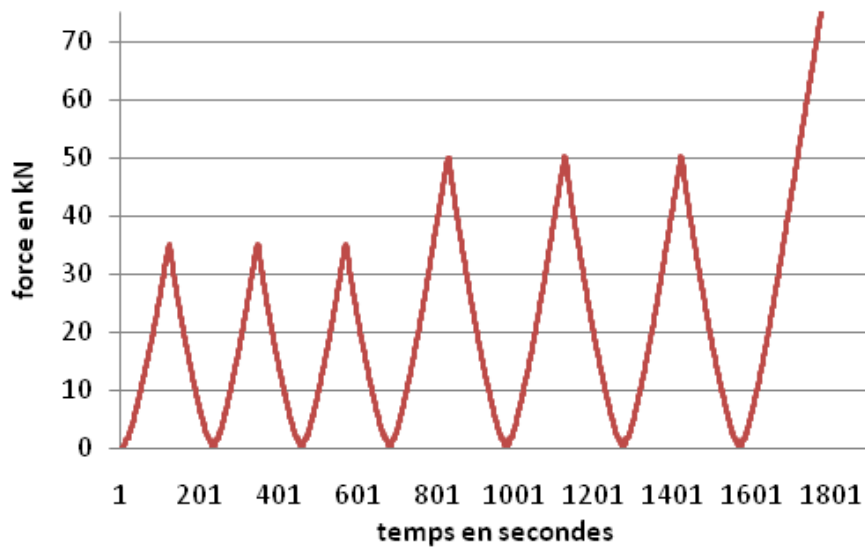


Figure 5.12. *Chargement des poutres renforcées*

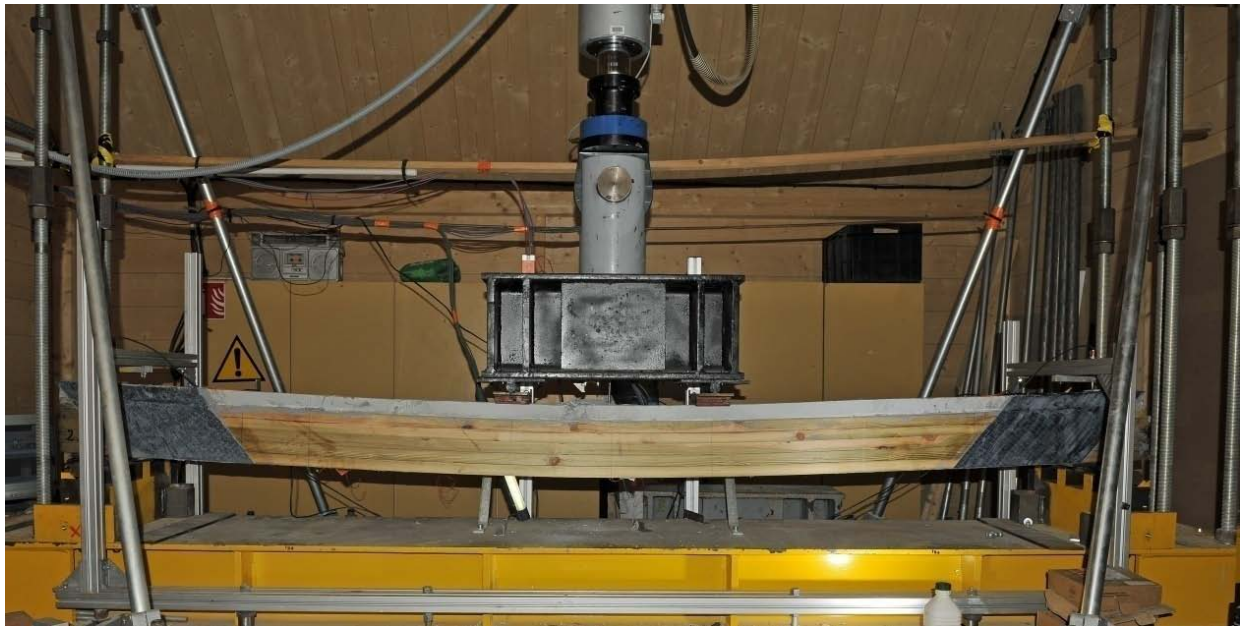


Figure 5.13. *Corps d'épreuve prêt à être testé*

5.6. Modélisation des poutres par le modèle M4-5n

Afin de calculer l'état de contrainte dans les poutres, nous présentons dans ce paragraphe le calcul élastique par le modèle M4-5n adapté pour la configuration de l'essai de flexion 4 points (Figure 5.14). Un code de calcul a été créé dont les détails se trouvent dans le chapitre 3, nous ne donnons ici que les éléments essentiels, y compris les conditions aux limites particulières.

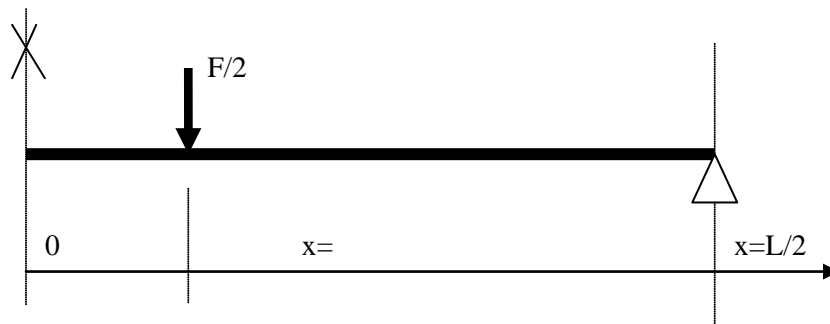


Figure 5.14. *Schéma mécanique pour le calcul, avec $L=3\text{ m}$*

Chaque couche matérielle dans les poutres se modélise par une couche modèle. Les poutres multi lamellées sont modélisées alors par une structure de 7 couches (3 couches de carbone, 3 couches de bois et une couche de béton. Nous ne modéliserons pas les couches de colle. Comme les poutres sans renfort ne se composent que de 2 couches matérielles, elles peuvent être alors modélisées par un 2-couches. Toutefois elles sont modélisées par un 4-couches (3 couches de bois et une couche de béton) correspondant à celles des poutres renforcées.

Les conditions aux limites sont (voir équation (3.19)) :

$$\begin{cases} U^i(x=0) = 0 \\ \phi^i(x=0) = 0 \\ Q^i(x=0) = 0 \\ N^i(x=L/2) = 0 \\ M^i(x=L/2) = 0 \\ W^1(x=L/2) = 0 \\ Q^{i \neq 1}(x=L/2) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Les conditions de continuité à $x=L/10$ sont présentées comme dans le chapitre 3, on précise :

$$\begin{cases} U_-^i(x=L/10) = U_+^i(x=L/10) \\ \phi_-^i(x=L/10) = \phi_+^i(x=L/10) \\ Q_-^{i(\neq n)}(x=L/10) = Q_+^{i(\neq n)}(x=L/10) \\ Q_-^n(x=L/10) = Q_+^n(x=L/10) - F/2 \\ M_-^i(x=L/10) = M_+^i(x=L/10) \\ W_-^1(x=L/10) = W_+^1(x=L/10) \\ N_-^i(x=L/10) = N_+^i(x=L/10) \end{cases} \quad (5.2)$$

Nous allons nous intéresser à la simulation numérique des poutres en flexion, avec le suivi des ruptures progressives en traction des lamelles bois. Nous devons alors mettre des conditions de discontinuité sur ces fissures. Pour la fissure à $x=x_k$ dans la couche j , nous avons :

$$\begin{cases} Q_-^j(x_k) = Q_+^j(x_k) = 0 \\ M_-^j(x_k) = M_+^j(x_k) = 0 \\ N_-^j(x_k) = N_+^j(x_k) = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Le (-) et (+) indique respectivement la valeur de la partie à gauche et à droite de x_k .

On fait l'hypothèse que tout l'effort est transmis à la couche sur laquelle est appliquée la force concentrée, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'influence de l'objet intermédiaire (mousse caoutchouc, plaques métalliques...) sur les appuis ou aux points d'application de la force. Cette hypothèse est acceptable ce qui ne change pas les résultats dans la zone *courante* mais seulement dans une zone autour de point d'application (zone de perturbation). Donc aux positions d'appuis ($x=L/2$), la flèche de la couche en contact avec l'appui est nulle, et l'effort tranchant non nul.

Le premier résultat est présenté dans les Tableau 5.4 et Tableau 5.5. On montre que pour les cycles préliminaires toutes les poutres travaillent dans le domaine élastique mais c'est dans le bois que la contrainte est relativement la plus élevée, et ce pour les 2 cas de figure.

Charge	σ_{BFUP} [MPa]	σ_{bois} [MPa]	τ_{colle} [MPa]
20 kN	31,1	13,2	0,76
35 kN	54,5 (150)	23,2 (28)	1,33 (9)

Tableau 5.4. *Résultat de calcul - Contraintes maximales dans les poutres sans renfort (entre parenthèses sont affichées les résistances caractéristiques)*

Charge	σ_{BFUP} [MPa]	σ_{CFRP} [MPa]	σ_{bois} [MPa]	τ_{colle} [MPa]
35 kN	46,3	200	15,6	1,2
50 kN	66,2 (150)	285,7 (2800)	22,3 (28)	1,7 (9)

Tableau 5.5. *Résultat de calcul - Contraintes maximales dans les poutres renforcées (entre parenthèses sont affichées les résistances caractéristiques)*

5.7. Résultats

Une mesure est prise chaque seconde. Le temps d'occurrence d'événements particuliers est relevé pendant l'essai et des photographies des zones incriminées sont prises.

Les 5 poutres renforcées ont toutes présentées une résistance supérieure à celle des poutres non renforcées. En effet la rupture des poutres renforcées s'est produite pour des charges comprises entre 137 et 157 kN, avec une moyenne de 146 MPa, tandis celle des poutres non renforcées s'est produite entre 62 et 100 kN, avec une moyenne de 75 MPa. On note tout de même que la présence du BFUP en partie supérieure des poutres non renforcées leur permet d'atteindre des valeurs de chargement supérieures à celles que pourraient accepter des poutres BLC seules. Une poutre en BLC de même section transversale que celles hybrides testées se romprait à une force du vérin de l'ordre de 53 kN (pour une contrainte de rupture du bois de 50 MPa en traction).

Les poutres renforcées présentent une rigidité supérieure : ainsi pour une charge de 35 kN (palier de charge commun aux deux types de poutres testés) les flèches observées pour les poutres renforcées sont inférieures de 30% environ.

Pour quatre poutres renforcées sur cinq, la rupture a été initiée en traction entre les deux appuis au niveau d'un défaut de la lamelle inférieure, rupture immédiatement stoppée par la lamelle de carbone immédiatement supérieure. Après cette première phase, le chargement a ré augmenté (pilotage en déplacement). Pour ce qui concerne la phase finale, sur ces quatre poutres, deux d'entre elles ont été ruinées par endommagement du béton sur toute son épaisseur, les deux autres ont été ruinées par cisaillement (du renfort en cisaillement en carbone ou du bois, la rupture étant brutale, il est difficile d'en déterminer l'origine). La cinquième poutre renforcée ne présentant pas de défaut (nœud) au niveau de la lame inférieure, la ruine a été atteinte par plastification et rupture du béton en compression.

Type	Non renforcée			Renforcée (par 3 couches de Carbodur S812)				
Essais	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
Force [kN]	100	65	62	151	138	135	148	158
Flèche [mm]	35	24	23	44	45	41	46	42

Tableau 5.6. *Résistance et flèche maximales*

Les poutres non renforcées par des lames de carbone ont quant à elles connues des modes de rupture courants des poutres en bois : la rupture a été initiée en traction entre les deux appuis au niveau de la lame inférieure, puis la fissure en traction s'est propagé après bifurcation en une fissure de cisaillement, laquelle s'est développée jusqu'à l'appui.

Rôle des lamelles de carbones

La rupture du bois en traction est une rupture fragile. Or, lorsqu'une poutre est sollicitée en flexion, la rupture se produit d'abord dans la zone inférieure tendue, il s'agit donc d'une rupture fragile du fait du caractère fragile du bois en traction. La présence du carbone renforce le bois en traction ce qui fait augmenter en même temps la compression de la partie supérieure de la poutre. En

l'absence de renfort en BFUP, nous aurions constaté une rupture en compression du bois. Ici, le BFUP, du fait de sa grande résistance en compression (> 150 MPa) permet une augmentation significative de la sollicitation, et donc de la capacité portante.

Toutes les lamelles de carbone ne jouent *a priori* pas le même rôle. Il semble en effet que la lame de carbone inférieure retarde l'apparition de la première fissure de traction par rapport aux poutres non renforcées.

La lame de carbone située entre la dernière et l'avant dernière lames de bois évite la propagation de la fissure de traction à la lame de bois supérieure et également le départ en cisaillement.

Le rôle de la troisième lame de carbone (en partant du bas) n'a pu être clairement identifié au cours des essais car elle était peu sollicitée. Le nombre de lames de carbone nécessaire dépend bien entendu de la hauteur de la poutre. Plus la poutre est haute plus il semble falloir « discrétiser » le renfort carbone en multipliant les lames insérées. Inversement une hauteur faible de poutre ne nécessiterait pas de multiplier les couches de carbone mais uniquement d'en placer une en sous face.

Rôle du BFUP

Comme nous l'avons vu précédemment, la présence du BFUP apporte tout d'abord un gain en résistance. Nous avons ainsi pu constater que sur toutes les poutres la présence de BFUP fait remonter l'axe neutre conduisant à solliciter en traction la majorité de la section de bois. La contrainte maximale en traction est alors diminuée par l'augmentation de l'inertie de la section. Une conséquence directe est qu'à résistance ou rigidité égales, la présence de BFUP permet une réduction de la hauteur de la poutre. En outre, en présence de carbone, le BFUP apporte une certaine ductilité à la rupture du bois. En effet, la présence de composite favorisant une rupture en compression en partie supérieure, cette compression se produit alors d'abord dans le BFUP (à des contraintes très élevées) dont la rupture est ductile.

5.7.1. Observation au cours des essais sur les corps d'épreuves

Nous présentons maintenant les observations effectuées pour chaque corps d'épreuve. Nous rappelons que les essais faisant intervenir les poutres non renforcées sont numérotés 1.1, 1.2 et 1.3. Ceux concernant les poutres renforcées sont numérotés de 2.1 à 2.5. Sur les courbes on a réparti les points $\varepsilon(z)$ (déformation dans l'épaisseur) expérimentaux et ceux issus du calcul multicouche considérant les interfaces parfaites. On notera à ce propos sur tous les diagrammes de déformation tracés, la qualité de l'interface bois-béton qui peut être considérée parfaite

Poutre 1.1

A 100 kN, on observe la fissuration de la lame de bois inférieure à environ 1000 mm de l'appui sur le bâti ce qui entraîne une chute brutale de la charge appliquée de 100kN à 60 kN (pilotage du vérin en déplacement). Rechargement jusqu'à 75 kN et rupture de lame de bois inférieure au centre de la poutre.

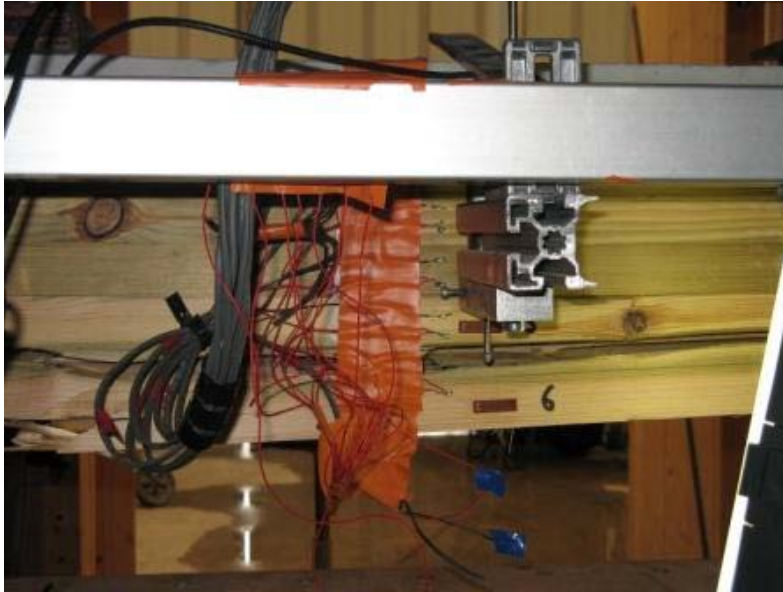


Figure 5.15. *Rupture de la lame inférieure à 75 kN*

Après la rupture atteinte à 75 kN (Figure 5.15), brusque chute de la force de 75 kN à 2 kN, poursuite de la descente du vérin, ruine de la poutre et rupture du béton en traction (Figure 5.16).



Figure 5.16. *Ruine de la poutre et rupture du béton en traction*

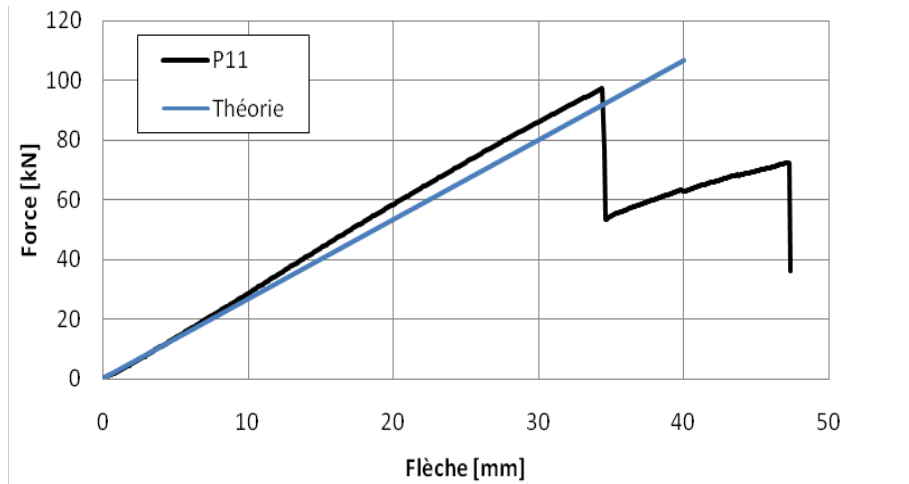


Figure 5.17. Courbe Force – Flèche de la poutre 1-1 (sans renfort)

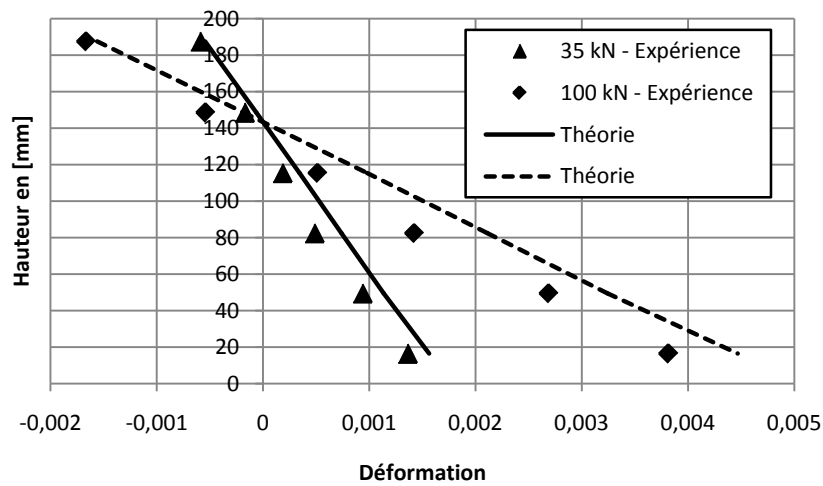


Figure 5.18. Navier centré de la poutre P1.1 (sans renfort)

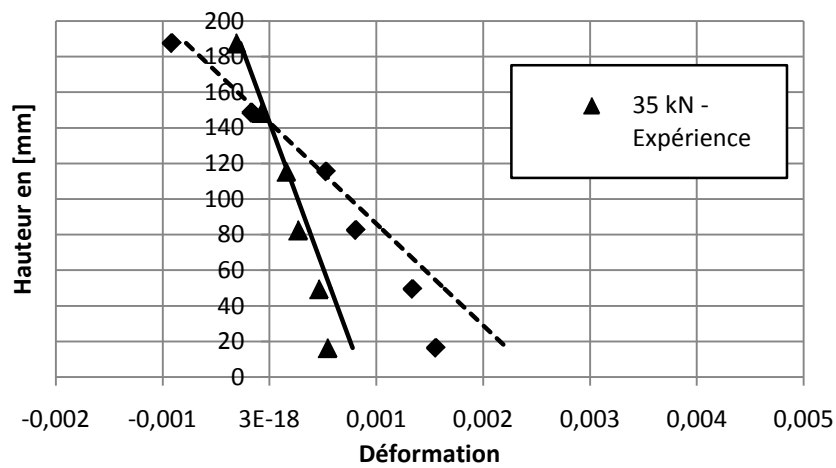


Figure 5.19. Navier ex-centré de la poutre P1.1 (sans renfort)

Poutre 1.2

A 56 kN rupture en traction d'un nœud au centre de la poutre (Figure 5.20). La charge ne chute pas et se poursuit jusqu'à 65 kN.



Figure 5.20. *Rupture en traction à 56 kN*

A 65 kN cisaillement de la lame inférieure et chute brutale de la charge de 65 kN à 38 kN. Rechargement de 38 kN à 43 kN et rupture en traction au niveau d'un autre nœud puis cisaillement. (Figure 5.21)



Figure 5.21. *Rupture en traction au niveau d'un second nœud puis cisaillement*

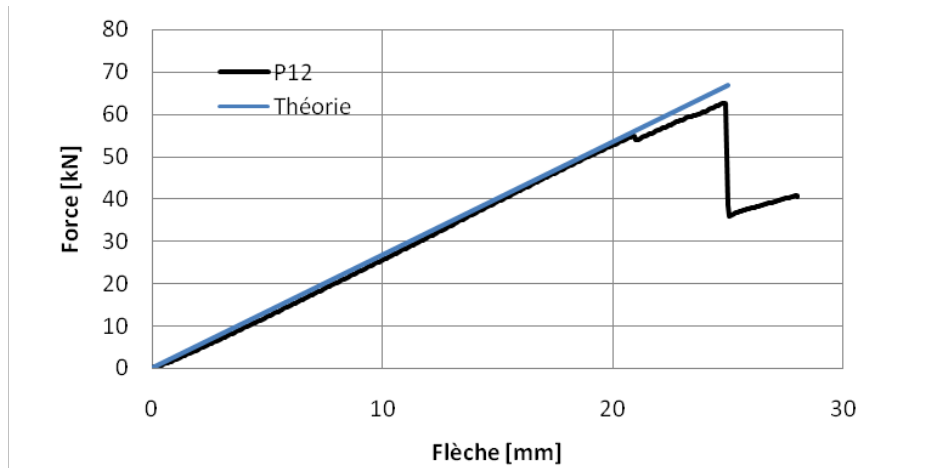


Figure 5.22. Courbe Force – Flèche de la poutre 1-1 (sans renfort)

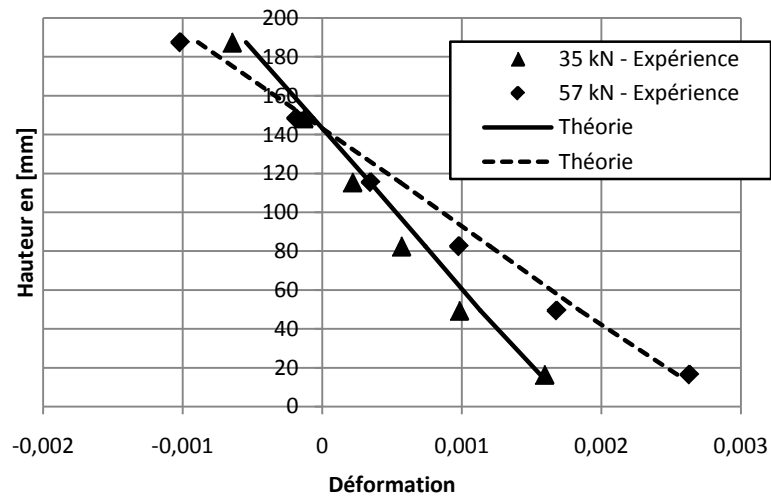


Figure 5.23. Navier centré de la poutre P1.2 (sans renfort)

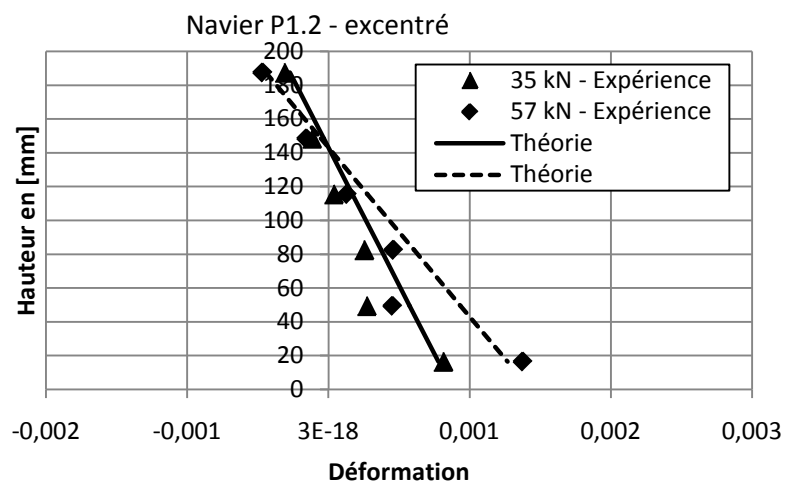


Figure 5.24. Navier ex-centré de la poutre P1.2 (sans renfort)

Poutre 1.3

A 60 kN rupture en traction de la lame inférieure au niveau d'un nœud situé entre les appuis (Figure 5.25). Chute de la charge de 60 kN à 58 kN.

Rechargement de 58 kN à 62 kN. Cisaillement puis rupture en traction au niveau d'un nœud sur la deuxième lame en partant du bas, puis à nouveau cisaillement. Chute de la charge de 62 à 19 kN.



Figure 5.25. *Rupture des lamelles du bois en traction*

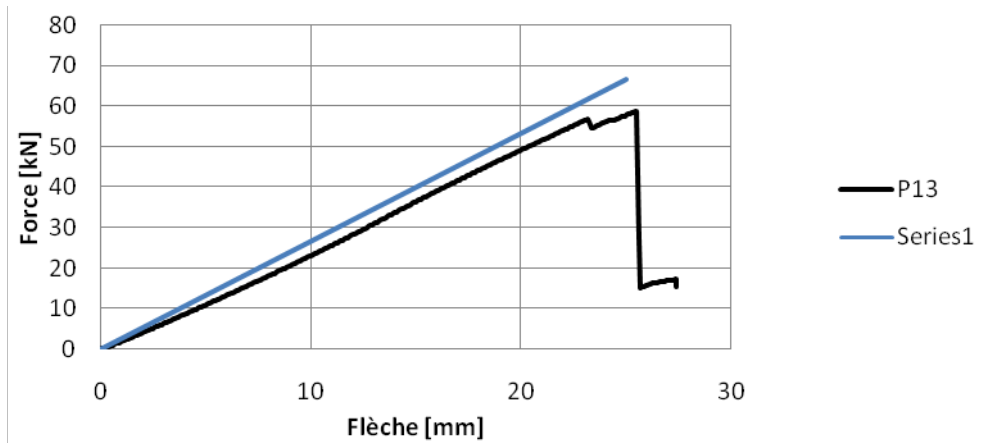


Figure 5.26. Courbe Force – Flèche de la poutre P-2.1 (renforcée)

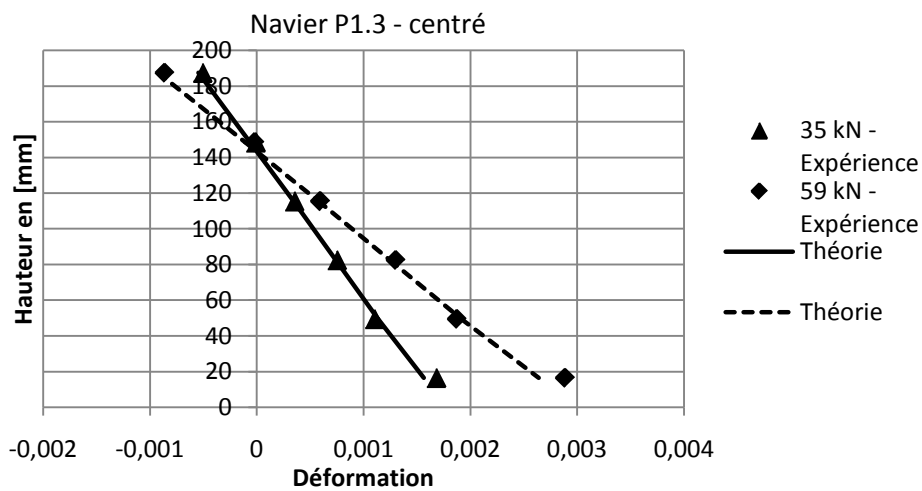


Figure 5.27. Navier centré de la poutre P2.1 (sans renfort)

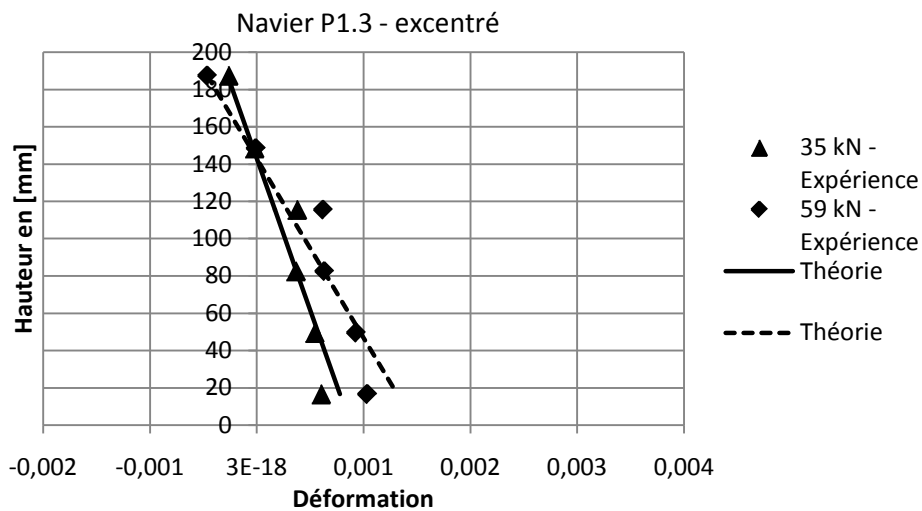


Figure 5.28. Navier excentré de la poutre P1.3 (renforcée)

Poutre 2.1

Il s'agit maintenant des poutres renforcées.

A 135 kN rupture en traction de la lame de bois inférieure. La fissure ne se propage pas car stoppée par la lame de carbone intermédiaire. Immédiatement après, début de plastification en compression du béton entre les points d'application de la force (Figure 5.29). La charge chute de 135 à 132 kN.



Figure 5.29. *Rupture de la lame inférieure et compression du béton*

Rechargement de 132 kN à 150 kN. A 150 kN, rupture du bois par compression au droit de l'endroit où le béton a été écrasé (Figure 5.30). Chute de la charge de 150 kN à 70 kN.



Figure 5.30. *Ruine par compression du bois*

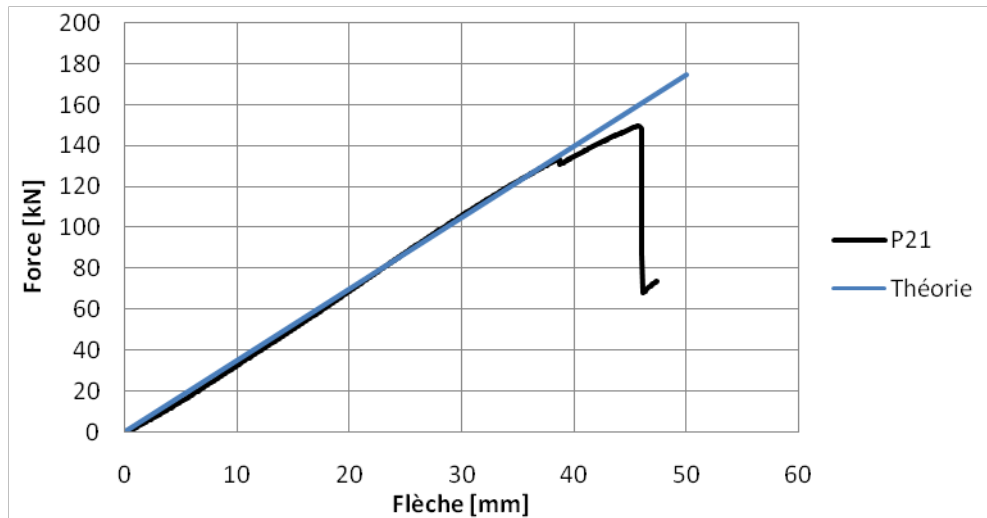


Figure 5.31. Courbe Force – Flèche de la poutre P 2.1 (sans renfort)

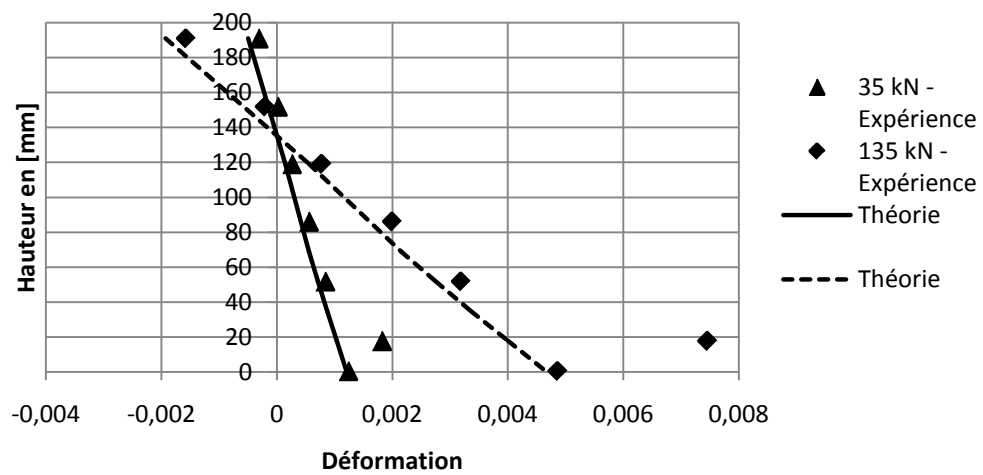


Figure 5.32. Navier centré de la poutre P1.1 (sans renfort)

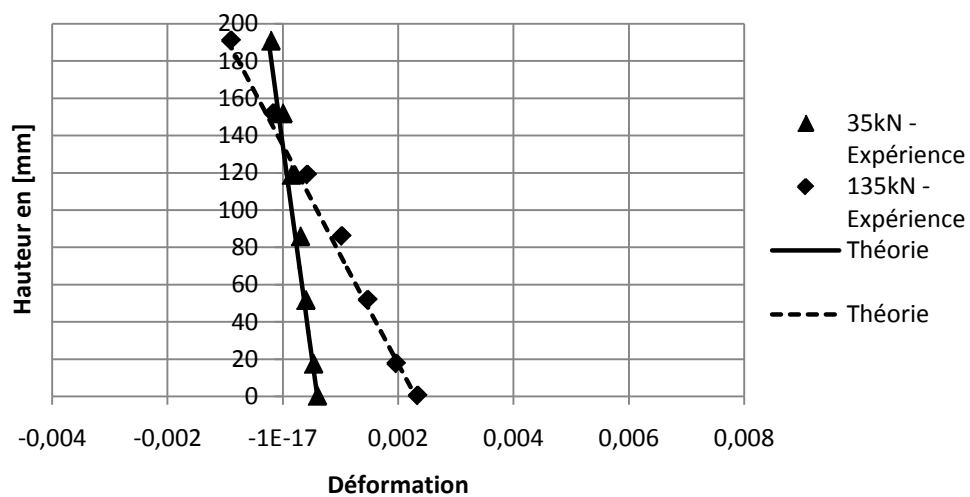


Figure 5.33. Navier excentré de la poutre P1.1 (sans renfort)

À partir de là, les poutres sont les poutres renforcées

Poutre 2.2

Remarque : le capteur 1G était bloqué pendant une partie de l'essai

Chargement jusqu'à 131,4 kN puis fissure en traction au niveau de la lame de bois inférieure entre les points d'application de l'effort (Figure 5.34). Fissure stoppée par la lame de carbone intermédiaire.



Figure 5.34. *Fissure de la lame inférieure en traction*

Très faible chute de la charge (de 131,4 kN à 130,8 kN) et reprise du chargement jusqu'à 136,3 kN. A 136,3 kN rupture, au niveau d'un nœud, de la deuxième lame en partant du bas (Figure 5.35). Puis départ de la fissure en cisaillement (Figure 5.36). Rupture des renforts carbone en cisaillement. La charge chute de 136,4 à 61,3 kN et se maintient à ce niveau. (Figure 5.37)

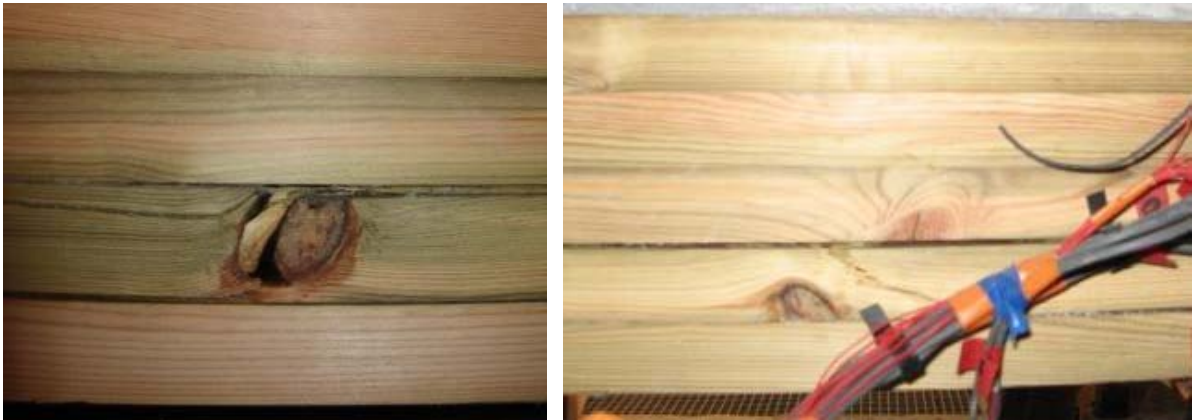


Figure 5.35. *Rupture de la deuxième lame en partant du bas (face avant à gauche, face arrière à droite)*

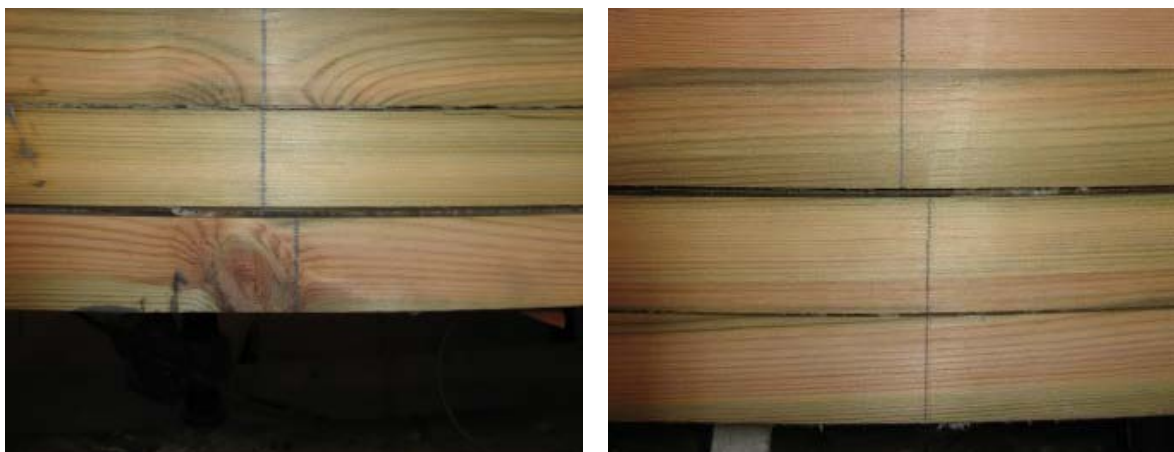


Figure 5.36. *Section 1/4 - Cisaillement clairement visible grâce aux traits verticaux tracés préalablement sur la poutre.*

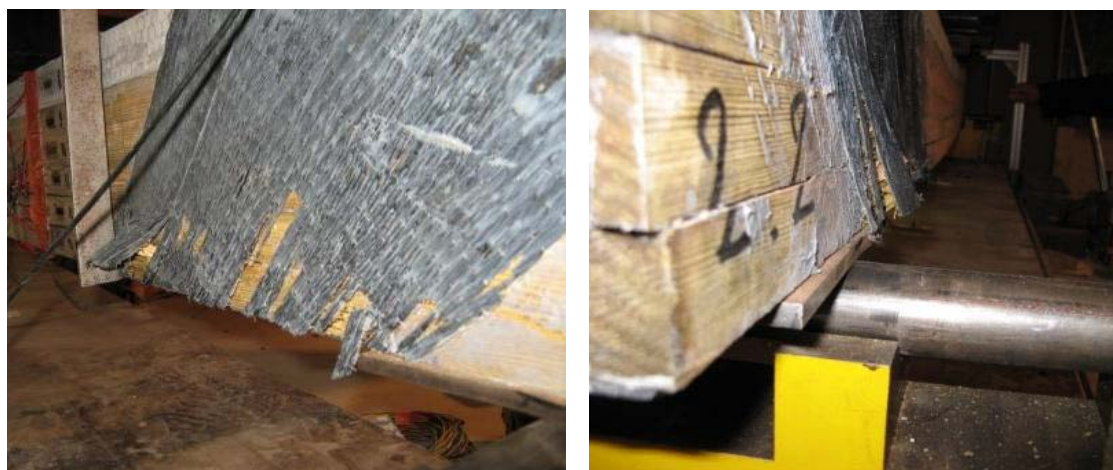


Figure 5.37. *Rupture du renfort carbone en cisaillement*

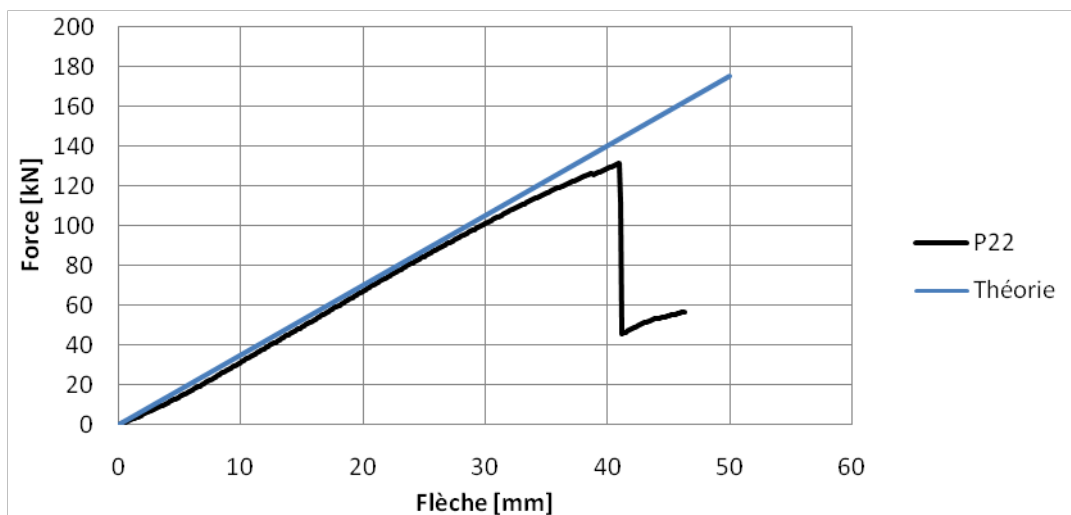


Figure 5.38. Courbe Force – Flèche de la poutre P 2.2 (renforcée)

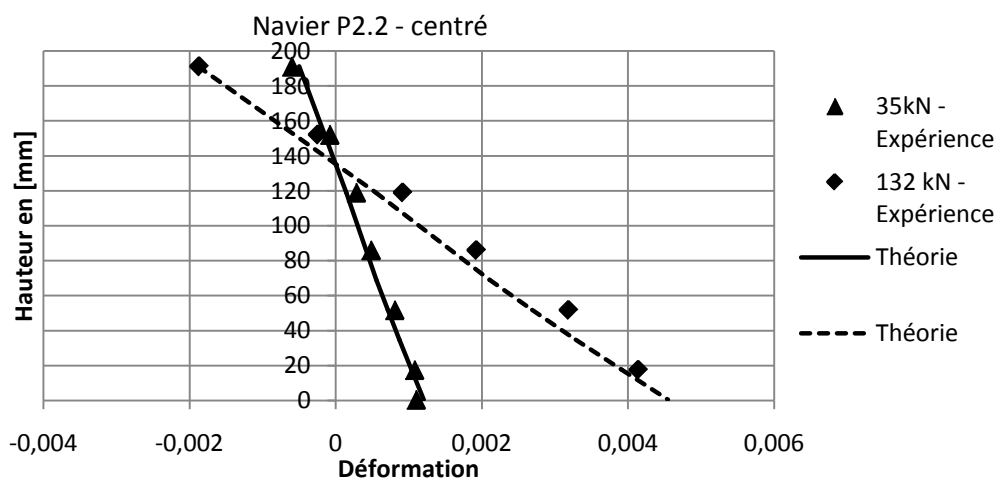


Figure 5.39. Navier centré de la poutre P 2.2 (renforcée)

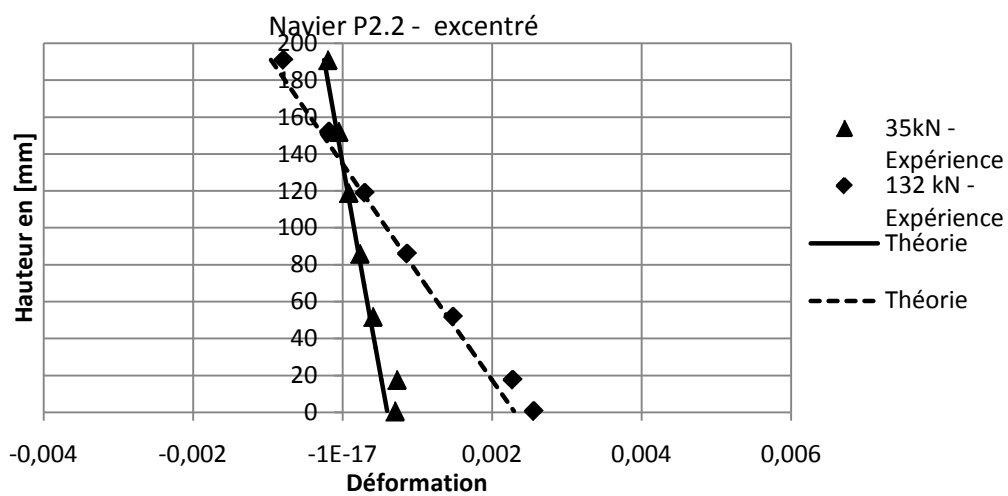


Figure 5.40. Navier excentré de la poutre P 2.2 (renforcée)

Poutre 2.3

A 134 kN, fissure lame inférieure par traction entre les points d'application de l'effort. Fissure stoppée par lame de carbone intermédiaire (Figure 5.41). La charge chute de 134 à 126 kN.

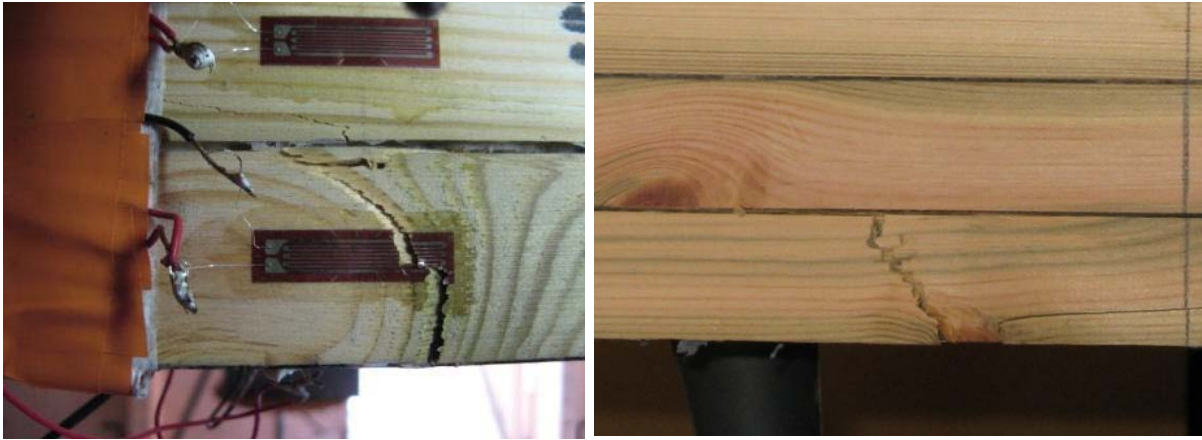


Figure 5.41. *Fissure de la lame inférieure par traction.*

Le chargement reprend jusqu'à 140kN puis plastification du béton par compression entraînant la ruine du bois par compression à la verticale de la zone de béton comprimée (Figure 5.42)

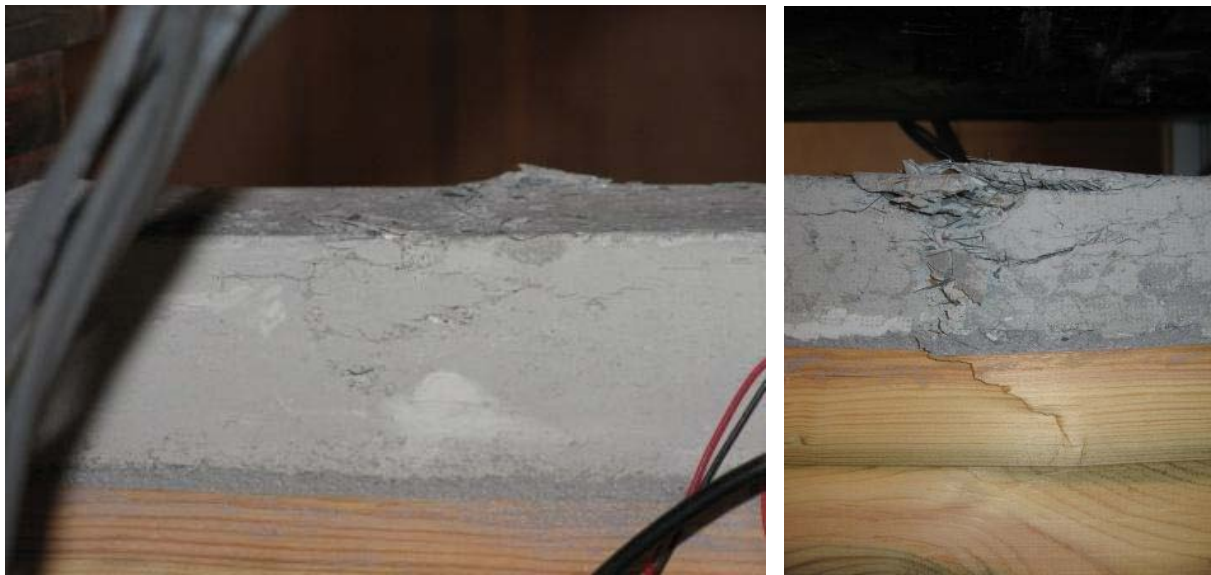


Figure 5.42. *Plastification du béton par compression et ruine du bois à l'aplomb*

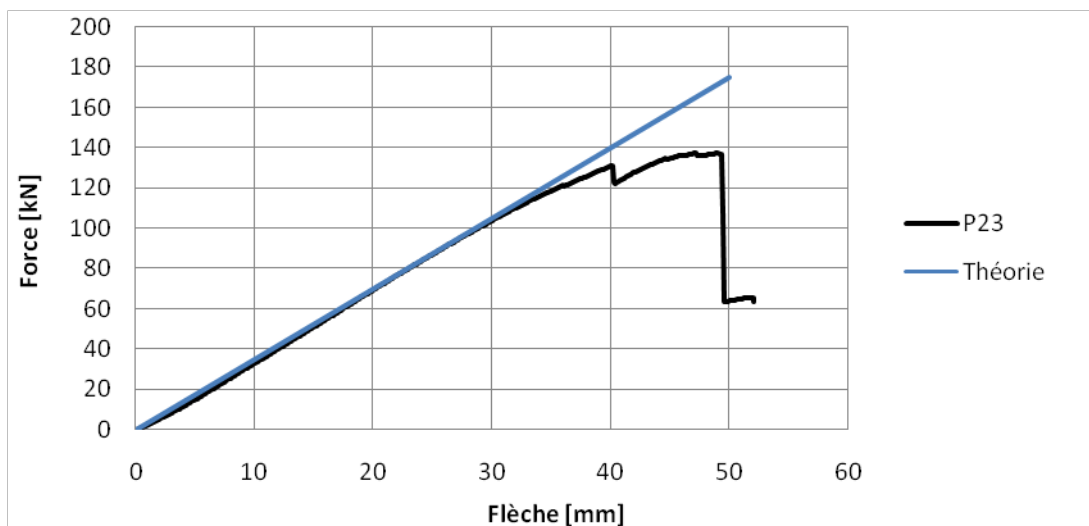


Figure 5.43. Courbe Force – Flèche de la poutre P 2.3 (renforcée)

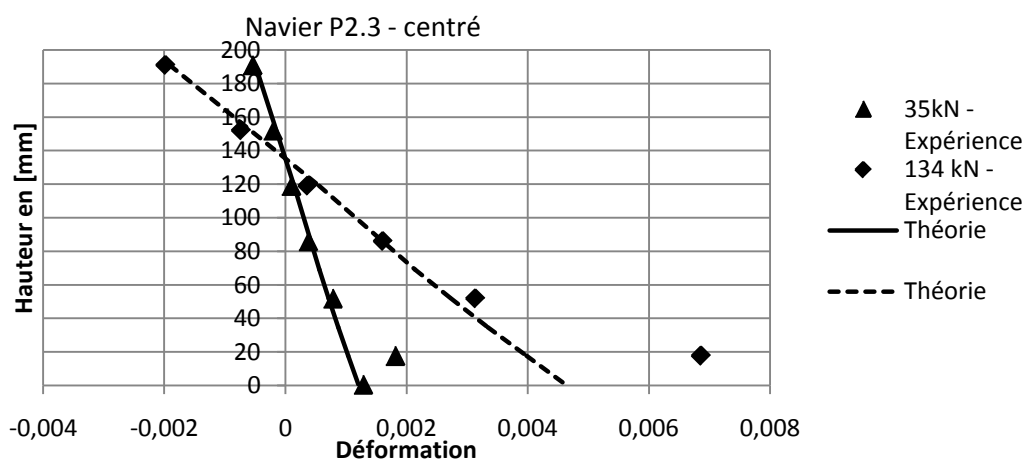


Figure 5.44. Courbe Force – Flèche de la poutre P 2.3 (renforcée)

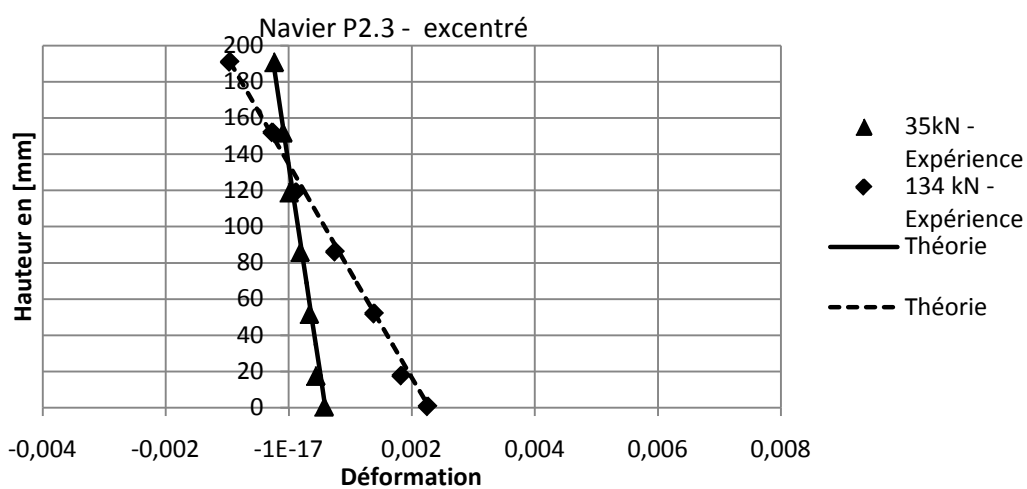


Figure 5.45. Navier excentré de la poutre P 2.3 (renforcée)

Poutre 2.4

A 146 kN, fissure lame inférieure par traction entre les points d'application de la force. Fissure stoppée par lame de carbone intermédiaire (Figure 5.46). La charge chute de 146 à 32 kN.



Figure 5.46. *Fissure en traction stoppée par la lame de carbone intermédiaire*

Reprise du chargement de 32 à 35 kN. A 35 kN début de rupture en cisaillement dans le bois.



Figure 5.47. *Ruine de la poutre en cisaillement et rupture du renfort carbone aux extrémités*

Le chargement se poursuit de 35 kN à 45 kN. A 45 kN, ruine de la poutre par cisaillement et rupture des renforts en carbone placés aux extrémités de la poutre. (Figure 5.47)

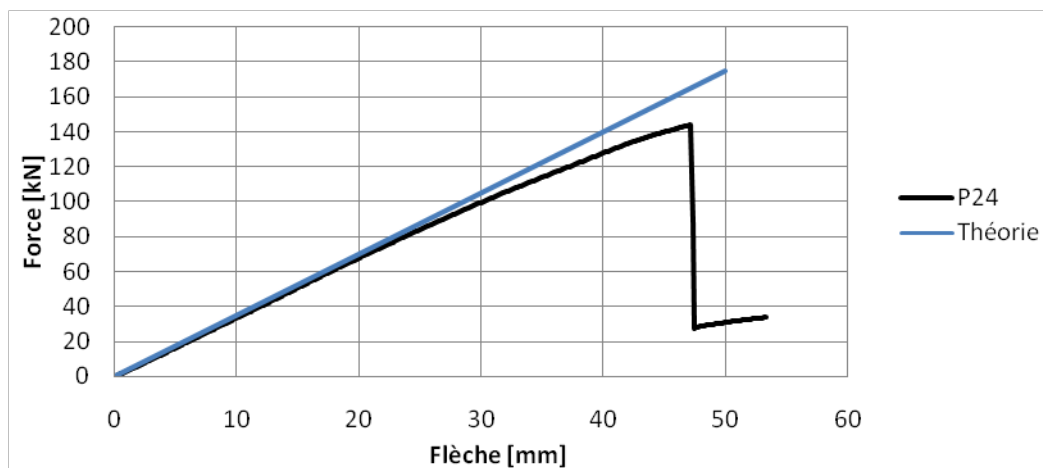


Figure 5.48. Courbe Force – Flèche de la poutre P2.4 (renforcée)

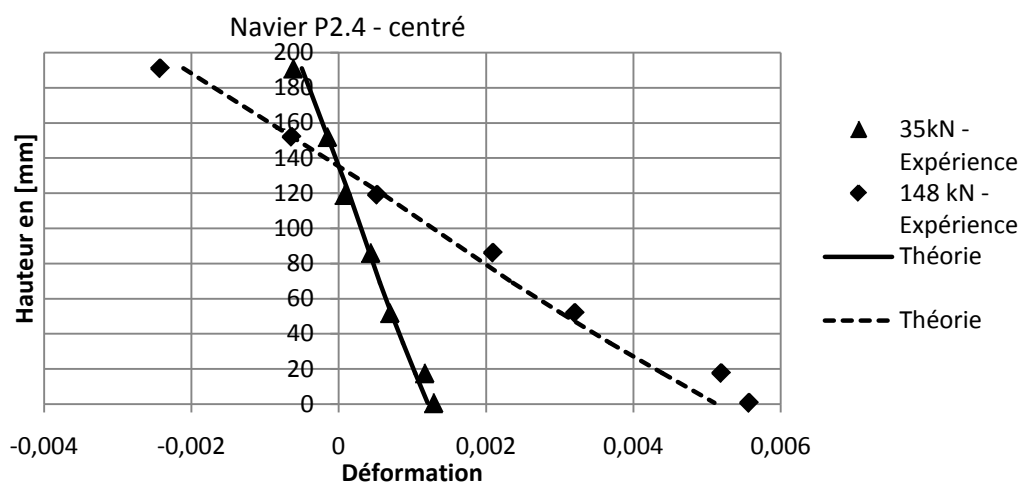


Figure 5.49. Navier excentré de la poutre P 2.4 (renforcée)

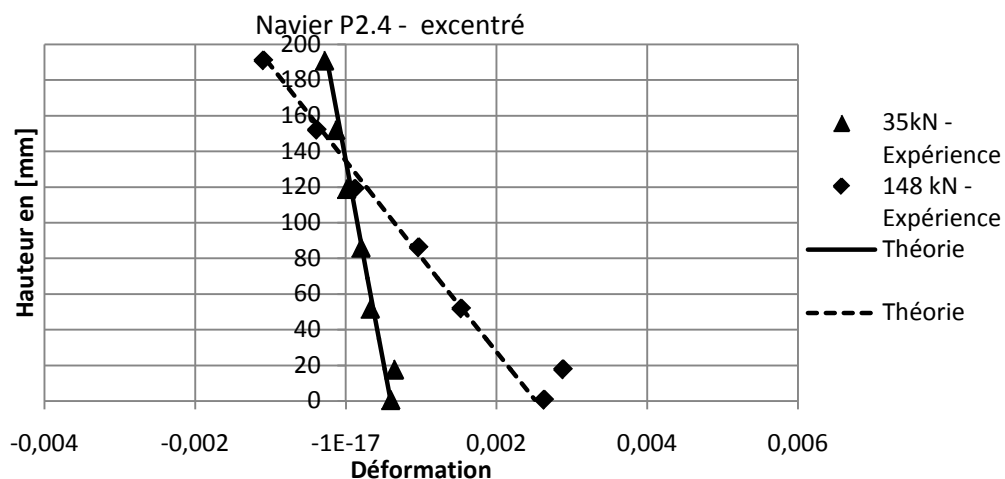


Figure 5.50. Navier excentré de la poutre P 2.4 (renforcée)

Poutre 2.5

Remarque : pas de faiblesse apparente de la lame inférieure (contrairement aux poutres précédentes qui comportaient souvent des nœuds entre les points d'application de l'effort).

A 149 kN le béton commence à se plastifier en compression. Le chargement se poursuit jusqu'à 157 kN où l'on observe la rupture par compression du béton et du bois adjacent (Figure 5.51). La charge chute de 157 kN à 60 kN et se maintient à ce niveau. La lame inférieure est restée intacte.



Figure 5.51. *Plastification du béton par compression et ruine du bois*

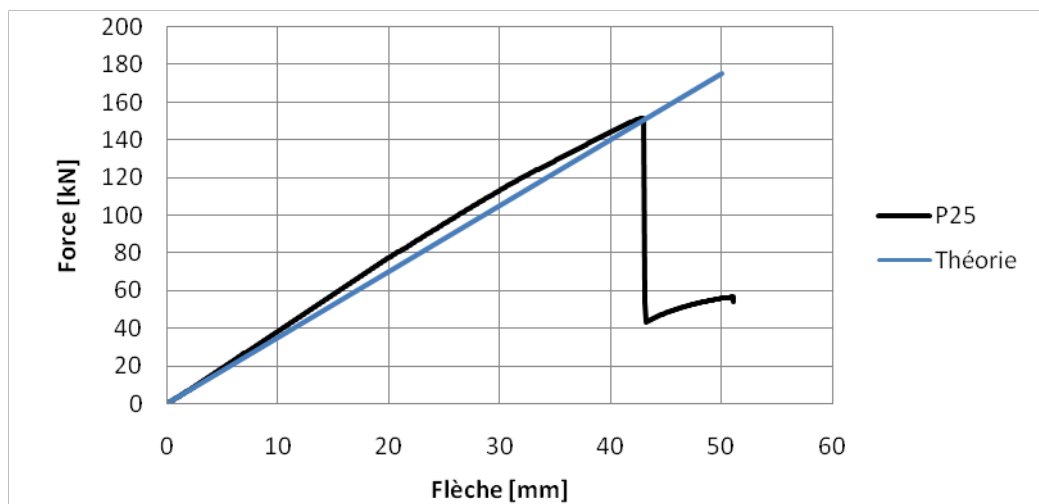


Figure 5.52. Courbe Force – Flèche de la poutre P2.5 (renforcée)

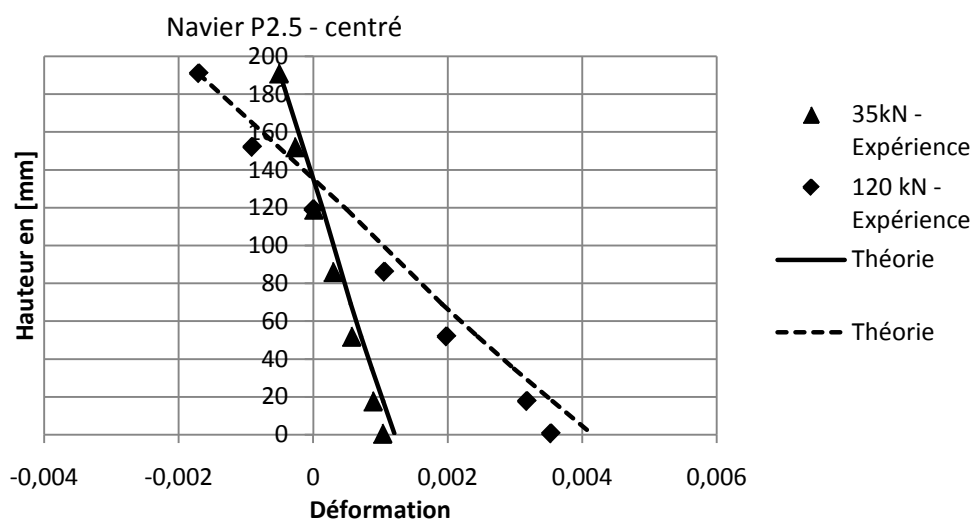


Figure 5.53. Navier centré de la poutre P 2.4 (renforcée)

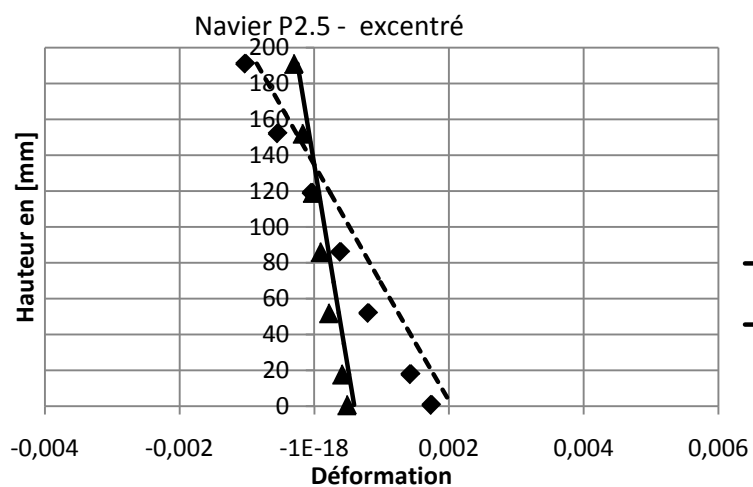


Figure 5.54. Navier excentré de la poutre P 2.4 (renforcée)

5.7.2. Analyse des résultats

Comportement élastique et jusqu'à la rupture

Nous rappelons que toutes les poutres ont été testées par 6 cycles charge – décharge avant d'aller à la rupture finale. Ces cycles permettent de vérifier leur comportement élastique qui sera comparé avec celui obtenu par un calcul théorique (Figure 5.55). L'ensemble des courbes Force – Flèche jusqu'à la rupture se présente dans la Figure 5.56 et Figure 5.57.

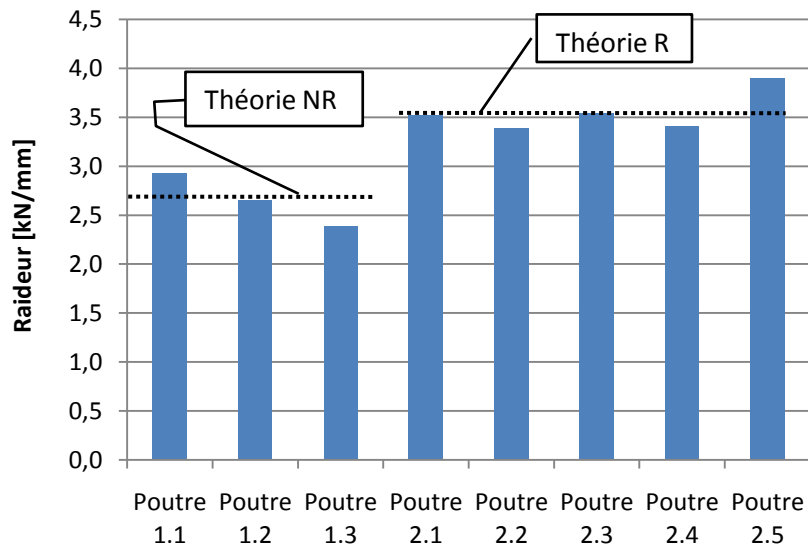


Figure 5.55. Rapport Force / Flèche à mi-travée

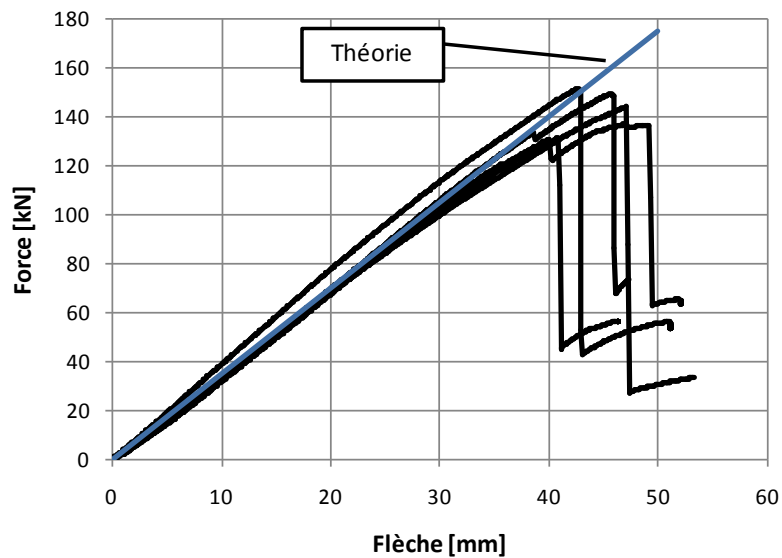


Figure 5.56. Force – Flèche des poutres renforcées et comparaison avec les prévisions du modèle M4 5n (Modèle classique)

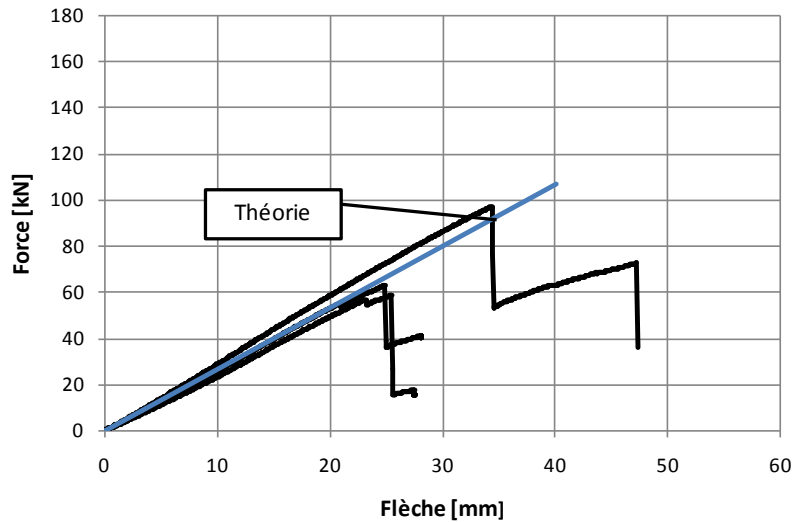


Figure 5.57. Force – Flèche des poutres non-renforcées

Les 5 courbes des poutres renforcées sont cohérentes tandis que la poutre 1.1 présente une résistance beaucoup plus grande que les 1.2 et 1.3. La raideur des poutres est bien prévue par la théorie classique de stratifiés.

Déplacement relatif entre lamelles extrêmes

Dans toutes les poutres, grâce aux capteurs A_1 et A_3 (Figure 5.9), nous avons mesuré un déplacement relatif (Figure 5.9 et Figure 5.10) entre les lamelles extrêmes des poutres, engendré par les efforts de cisaillement. Par rapport aux modèles courants (Reissner, Love Kirchhoff), le M4-5n nous permet de déterminer ce déplacement. En effet, la valeur $D^{2,7}$ des capteurs A_1 et A_3 se détermine théoriquement par :

$$D^{2,7}(x_A) = U^7(x_A) - U^2(x_A) - \Phi^2(x_A)(\bar{h}^7 - \bar{h}^2) \quad (5.4)$$

Où $x_A = 1100$ la position de la mesure, U^7, U^2, Φ^2 sont respectivement le déplacement membranaire dans le béton (couche numérotée 7), dans la lamelle extrême du bois (couche numérotée 2) et la rotation de cette lamelle bois à x_A .

La comparaison entre le résultat théorique et celles mesurées se présente dans les Figure 5.58 et Figure 5.59. Pour la même poutre, nous prenons la moyenne de deux valeurs A_1 et A_3 . Quelques erreurs sur la mise en mesure de ces capteurs ont été constatées (capteur A_3 -poutre 2.3 et capteur A_1 -poutre 2.5), leurs valeurs ne sont pas utilisées.

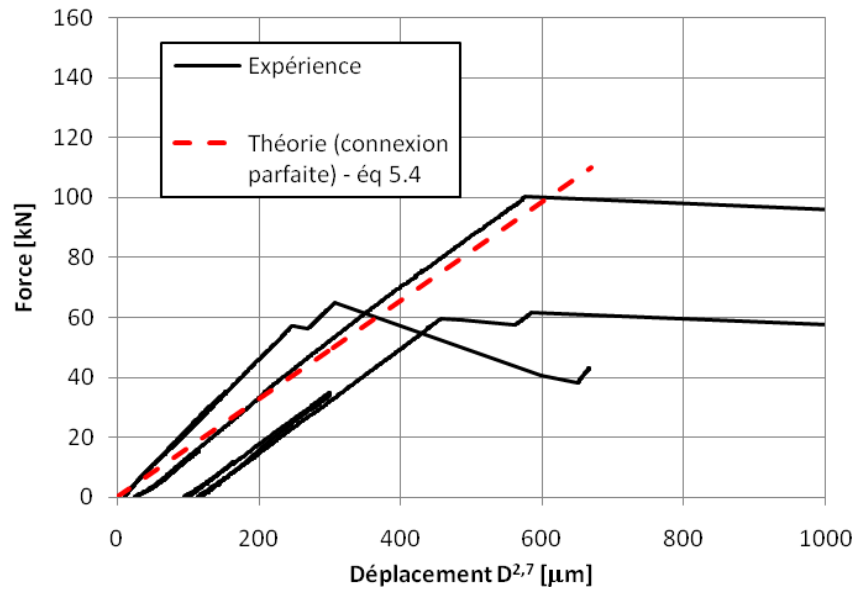


Figure 5.58. Comparaison de déplacements relatifs calculés et mesurés dans les poutres sans renfort

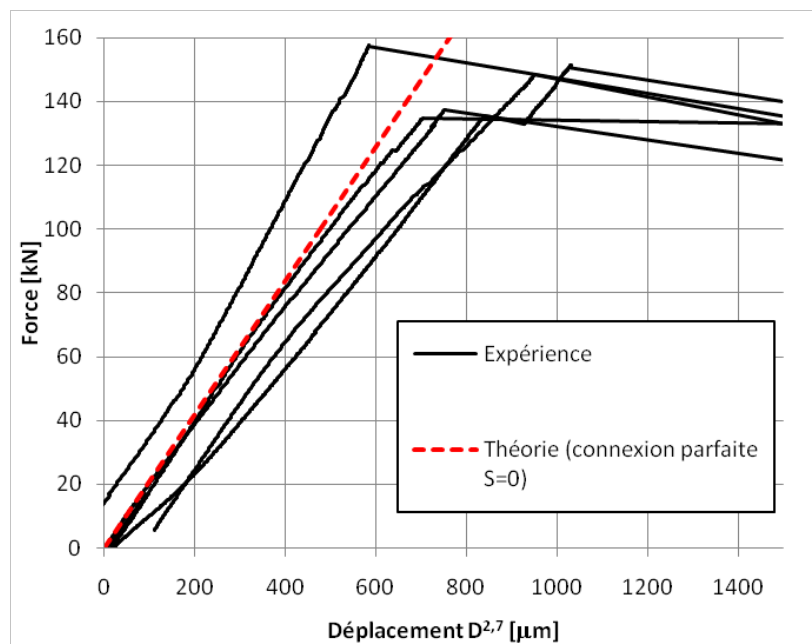


Figure 5.59. Comparaison de déplacements relatifs calculés et mesurés dans les poutres renforcées

Nous trouvons une cohérence théorie – expérience.

Evaluation des deux effets du renforcement :

Effet de raideur

Effet de résistance

Dans le chapitre 2, nous avons établi les lois de probabilité de rupture du bois renforcé et non renforcé, ce qui peut être décrit par une relation :

$$\delta R_a = R_{p,renf} - (R_p + \delta R_s) \quad (5.5)$$

Où $R_{p,renf}$, R_p sont, respectivement les résistances de la poutre renforcée et sans renfort. δR_s est le gain de résistance obtenu grâce à l'augmentation de la raideur de la poutre en présence du renfort, ce gain est déterministe et ne dépend que de la quantité et du module du renfort. δR_a est donc le gain de résistance supplémentaire réellement obtenu par l'effet du renforcement sur la statistique des défauts critiques dans le bois et donc par la modification de la loi de Weibull décrivant le comportement du bois.

Lorsqu'on considère cette relation, en prenant $R_p = 75,67$ (kN) la moyenne de la résistance de trois poutres sans renfort. La quantité $(R_p + \delta R_s) = 105,4$ (kN) est la résistance de la structure renforcée telle que le prévoirait la RdM. nous avons donc :

	Poutre				
	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
Résistance mesurée [kN]	151	138	135	148	158
δR_a [kN]	45,6	32,6	29,6	42,6	52,6
$\frac{\delta R_a}{\text{Prévision RdM}}$ (%)	43,26%	30,93%	28,08%	40,42%	49,91%

Tableau 5.7. *Évaluation des effets de renforcement sur la résistance des poutres en flexion*

Nous obtenons en moyenne une augmentation de 38.52% de la résistance par rapport au résultat d'un calcul RdM.

Ce pourcentage peut être plus important car il est obtenu sur des poutres qui ont cédé toutes par cisaillement du bois ou compression du béton, mais aucune par traction du bois. Un nouveau dimensionnement serait nécessaire si l'opportunité de refaire de telles poutres se représenterait.

5.8. Une simulation numérique

Ce paragraphe propose une simulation numérique du comportement mécanique de poutres sandwich bois-béton multi-renforcées par des lamelles en composite, soumises à une flexion 4 points. Le but du modèle est de justifier le comportement à la rupture de la population de poutres d'essais.

La modélisation du comportement mécanique des poutres comporte deux phases principales :

- La génération des valeurs locales des propriétés mécaniques des matériaux utilisés (béton BFUP, bois, carbone) et des interfaces (joints de colle). La description de la variabilité des propriétés mécaniques des poutres lamellées collées se fait de manière discrète.
- L'analyse déterministe de l'endommagement progressif de la structure.

Nous avons utilisé la technique de Monte Carlo pour simuler les fonctions de répartition de la contrainte ultime de populations de poutres présentant la même structure de données d'entrée.

5.8.1. Grandeurs matérielles et critère de rupture

Description du modèle

La poutre sandwich renforcée est discrétisée selon sa hauteur en 8 couches (3 couches de carbone, 4 couches de bois et 1 couche de BFUP) et selon sa longueur en fonction des singularités. Ces singularités peuvent être éventuellement celles des fissures transverses, les intervalles définissant

la rupture d'interface (délaminage) ou des charges concentrées. Cependant, la vérification de l'endommagement se fait de manière plus fine pour prendre en compte la variabilité longitudinale de la contrainte ultime.

Dans cette modélisation, nous supposons que les modules d'élasticité des matériaux sont constants. Les valeurs aléatoires de la résistance en traction longitudinale du bois, et celles en cisaillement des interfaces bois-carbone sont générées à partir du modèle présenté, respectivement, dans le chapitre 2 et chapitre 4. Les valeurs de la résistance du béton et du carbone sont prises de la fiche technique ($R_{BFUP} = 170 \text{ MPa}$, $R_{CFRP} = 1800 \text{ MPa}$).

Comme toutes les poutres sont renforcées en cisaillement, pour simplifier, nous modélisons les parties d'extrémités par une structure multicouche ayant les mêmes épaisseurs des couches de la partie centrale. Les modules et les résistances dans ces parties sont modifiés grâce à un calcul d'homogénéisation simple.

Critère de rupture

Le critère de rupture pour les couches est le critère de la contrainte maximale (Faye, 1997). Il s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \left| \frac{\sigma_{xx}}{R_{xx}} \right| < 1 \\ \left| \frac{\tau_{xz}}{\tau_{cr}} \right| < 1 \end{cases} \quad (5.6)$$

Où σ_{xx} , τ_{xz} sont respectivement, les contraintes maximales en traction de couche, le cisaillement d'interface. R_{xx} , τ_{cr} sont les contraintes de Weibull. Ce sont respectivement la résistance normale (traction et compression) et la résistance en cisaillement du bois.

5.8.2. Suivi de la rupture progressive et organisation du programme de simulation

Nous présentons dans ce paragraphe un code de calcul Maple que nous avons développé. Il y a dans le code deux catégories de blocs fonctionnels, ceux spécialisés dans la lecture, la vérification et l'organisation des données, et ceux qui exécutent une procédure du calcul Monte Carlo.

Les blocs de lecture des données géométriques et des matériaux ne sont exécutés qu'une seule fois comme toutes les poutres simulées ont de la même géométrie. Le maillage est automatiquement réalisé grâce aux données précédentes. La procédure de Monte-Carlo est exécutée par des blocs fonctionnels grâce auxquels, chaque tirage aléatoire est effectué dans l'ordre :

- La génération du maillage stochastique
- L'affectation des propriétés élémentaires
- Le suivi de la rupture progressive de la poutre
- La réinitialisation des tables cumulatives

Le solveur implanté dans le code est celui de Maple qui optimise la résolution d'un système des équations linéaires.

La rupture en traction de couches et le délaminage d'interfaces sont présentés dans le chapitre précédent. Nous rappelons ici que, dans cette simulation, le délaminage d'interface est modélisé grâce au comportement imparfait d'interface dans lequel, la raideur en cisaillement d'interface est considérée nulle. Une vérification de la contrainte d'arrachement d'interface se réalise pour déterminer si la fissure d'interface s'ouvre. Si ce n'est pas le cas, la raideur normale d'interface ne change pas dans le calcul suivant. Si non, elle est définie nulle.

5.8.3. Résultats

Deux configurations des poutres en flexion 4 points sont simulées. Nous présentons tout d'abord les résultats de la simulation des poutres sans renfort.

Poutre sans renfort (poutre de référence)

Le chargement est le déplacement imposé. Le Tableau 5.8 présente les paramètres initiaux de la simulation.

Matériau	Nombre de couche	Epaisseur d'une couche	Module (GPa)		
			E_{xx}	G_{xz}	E_{zz}
Bois	5	33 mm	13	0.7	0.5
BFUP	1	45 mm	55	25	55

Tableau 5.8. Configuration de la poutre sans renfort simulée

Les paramètres de Weibull sont présentés dans le Tableau 5.9. A noter que R_{ab} (Φ dans l'équation (2.13)) est le coefficient d'échelle et k_{ab} (k dans l'équation (2.13)) est le coefficient de forme pour la direction ab . La longueur de corrélation L_{carac} est prise de 100mm.

R_{11} (MPa)	k_{11}	L_{c11} (mm)	R_{13} (MPa)	k_{13}	L_{c13} (mm)
85	4	100	22	11	100

Tableau 5.9. Paramètre statistique de la poutre sans renfort

A noter que les résistances et les modules du bois dans les parties d'extrémités de la poutre sont améliorés grâce au renfort de cisaillement. Les valeurs sont présentées dans le Tableau 5.10 ci-dessous :

E_{11} (GPa)	G_{13} (GPa)	R_{11} (MPa)	k_{11}	R_{13} (MPa)	k_{13}
12	0.8	85	4	35	11

Tableau 5.10. Modules et résistances du bois des parties d'extrémités.(voir le Tableau 2.6)

A titre d'exemple, les courbes dans la Figure 5.60 présentent respectivement le champ de la résistance en traction de la couche 1 et la résistance en cisaillement de l'interface 1-2 dans une simulation Monte Carlo. Les valeurs de résistance générées présentées par les points rouges sont le champ de résistance aléatoire discret. La courbe noire de type Spline est déterminée par l'interpolation, ce qui représente le champ de résistance aléatoire continu.

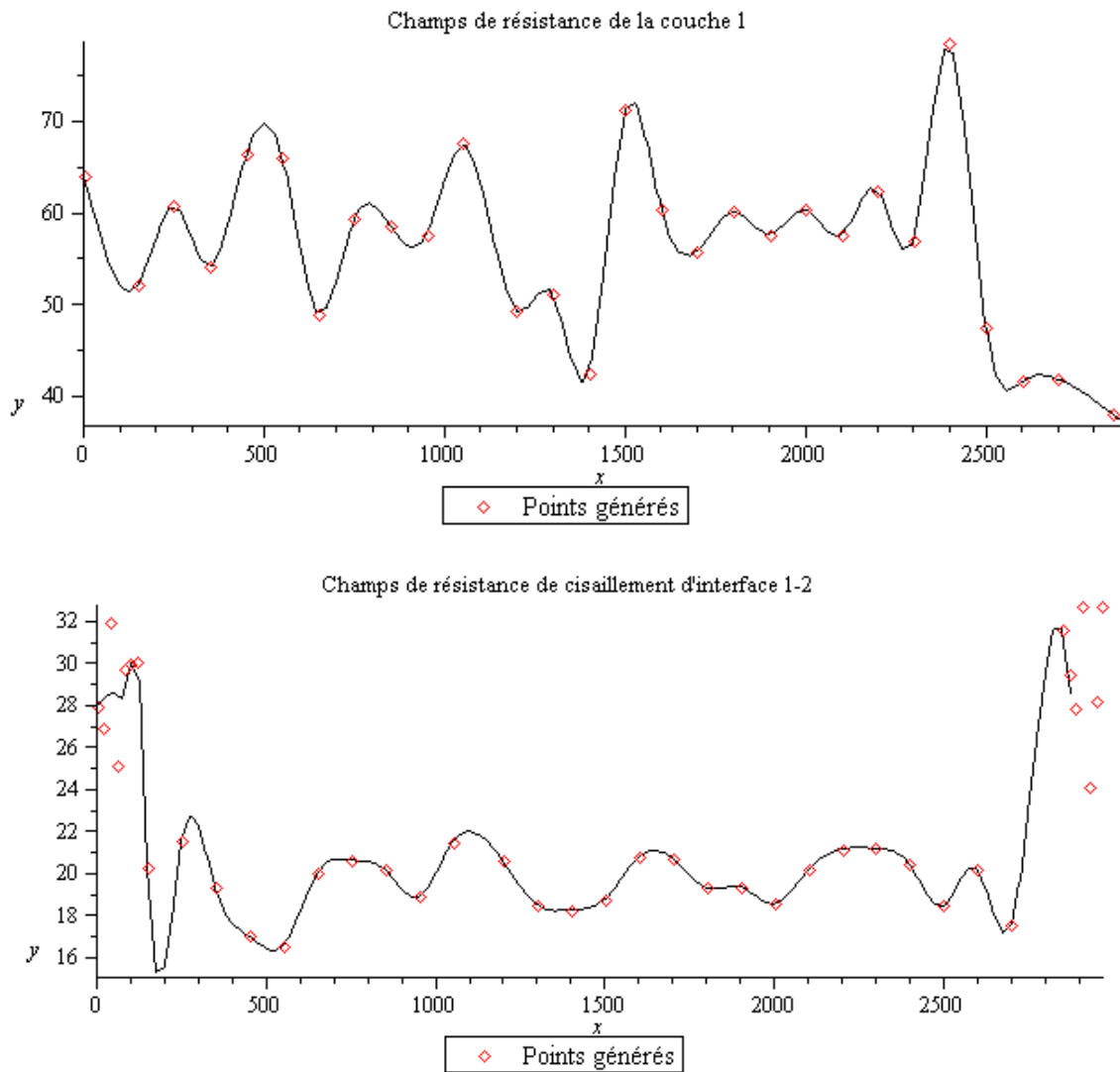


Figure 5.60. Les champs de résistance, respectivement de haut vers bas, en traction de la couche 1, en cisaillement et en traction normale de l'interface 1-2.

Le faciès d'une poutre sans renfort dans un essai numérique de flexion 4 points est présenté dans les Figure 5.61 et Figure 5.62. L'échelle de déformation de la structure est de 6.

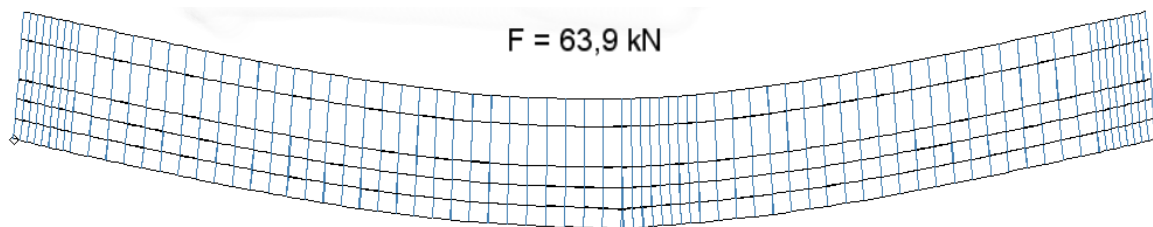


Figure 5.61. A la charge de 63,9kN, la première rupture a eu lieu dans la dernière lamelle de bois.

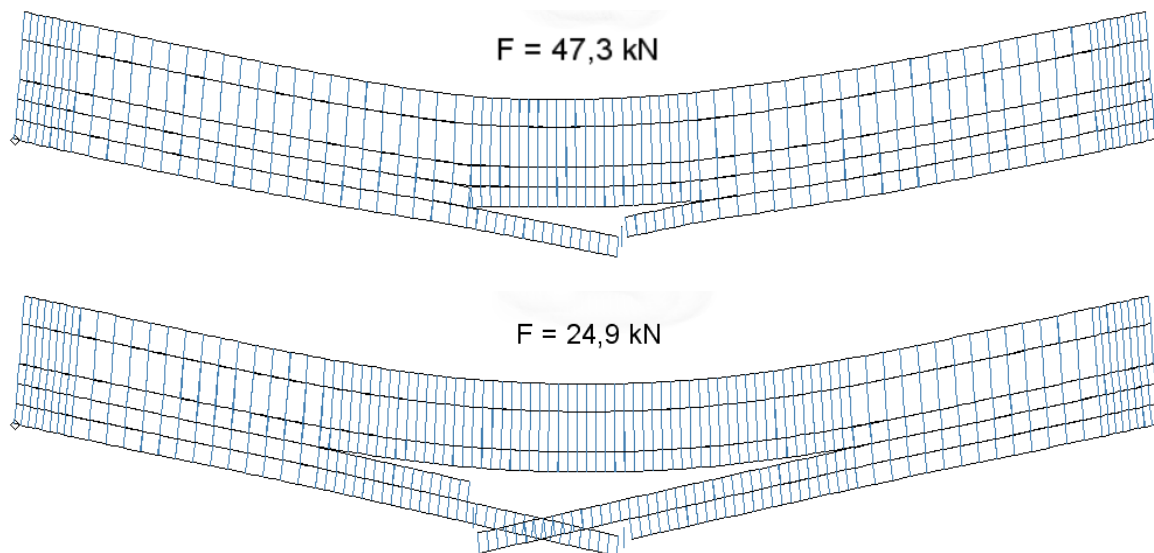


Figure 5.62. (a) et (b) La rupture progressive se propage dans les interfaces, la deuxième lamelle casse. La chute de charge est jusqu'à 24,9 kN

Nous trouvons que les lamelles cassées sont « superposées » après la rupture, ce qui est un artefact numérique. La courbe force – flèche de cette simulation est présentée dans la Figure 5.63. Cette courbe numérique correspond bien aux courbes expérimentales P1.2 et P1.3.

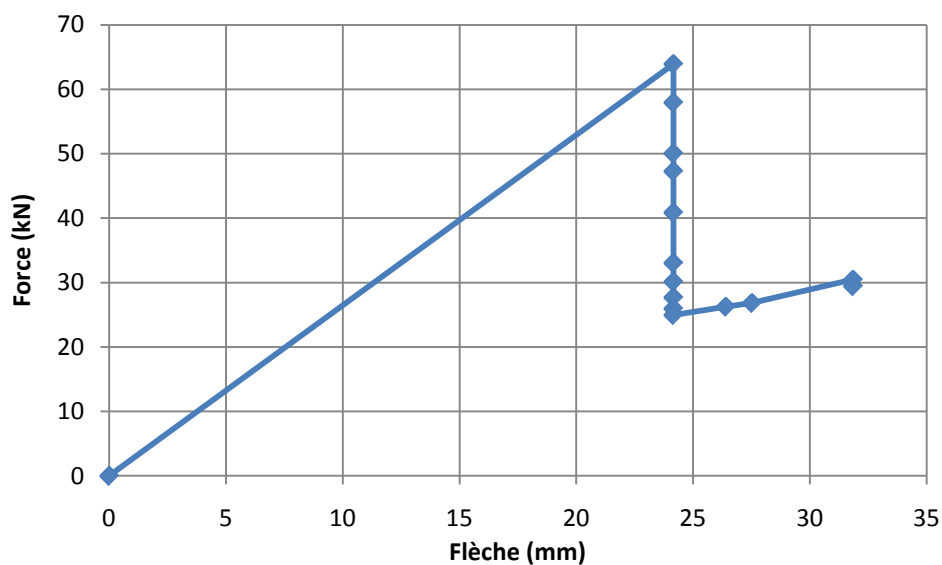


Figure 5.63. Courbe numérique Force – Flèche de la poutre sans renfort

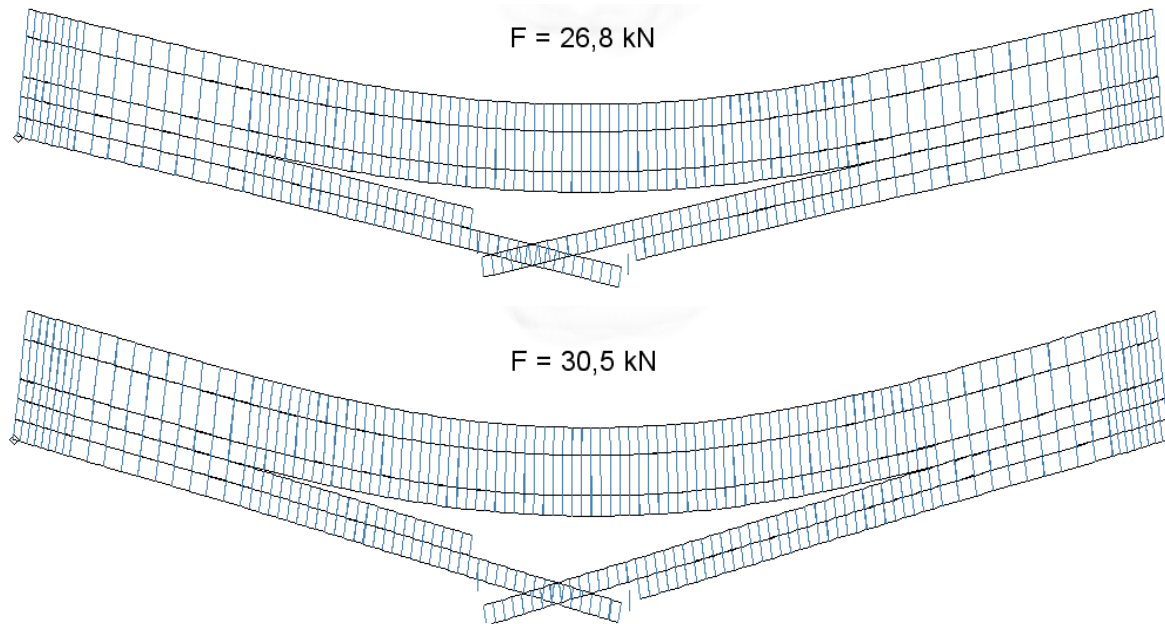


Figure 5.64. *La rupture se propage dans l'interface entre les lamelles 2 et 3. La charge augmente légèrement.*

Poutres renforcées

Tout d'abord, nous réalisons dans ce paragraphe la simulation numérique des poutres renforcées ayant la même configuration que celles expérimentales afin de vérifier le schéma de fissuration obtenu par les essais. Ensuite la simulation d'une poutre de configuration plus « fine » sera présentée, pour montrer que la performance de la poutre multi renforcée peut augmenter avec un meilleur dimensionnement.

La configuration de la poutre renforcée est celle sans renfort en intégrant 3 plaques de carbone d'épaisseur de 1,2mm entre les dernières lamelles de bois. La poutre est chargée en flexion 4 points avec la méthode de déplacement imposé. Les résultats sont enregistrés à chaque pas de calcul pour suivre la rupture progressive. Nous rappelons que le paramètre de forme k de la résistance en traction du bois est modifié pour le cas de poutre renforcée. Nous prenons $k=11$ conformément aux résultats analysés dans le chapitre 2.

A partir d'une charge de 100kN, la contrainte en compression dans la couche BFUP atteint environ 160MPa, ce qui dépasse la limite élastique du BFUP. En effet, le comportement du BFUP est non linéaire, l'énergie de déformation peut être stockée dans la zone plastifiée du béton, ce qui retarde la rupture totale de la poutre. Comme notre modèle ne tient pas compte de la non-linéarité matérielle, l'approche élastique dans cette simulation n'est pas suffisante. La force ultime de la simulation est donc inférieure à celle obtenue par l'expérience.

Les Figure 5.65 à Figure 5.67 présentent le faciès de la simulation de la poutre renforcée. Le béton casse après l'apparition de la première fissure dans le bois pour une charge de 107kN.

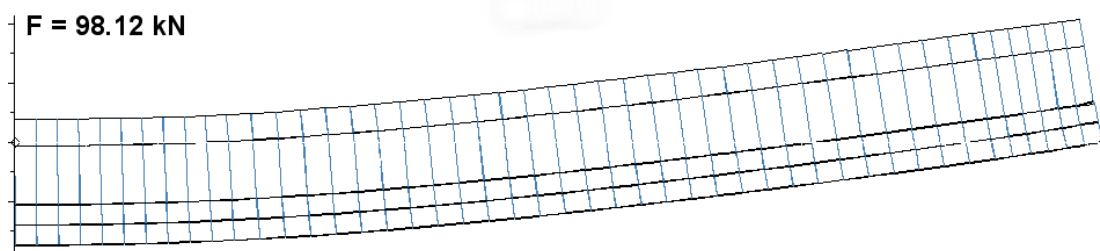


Figure 5.65. *La charge augmente linéairement jusqu'à la première fissure dans la dernière lamelle*

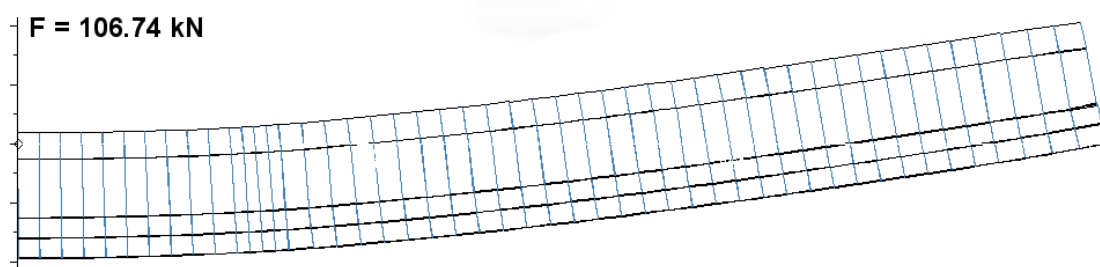


Figure 5.66. A la charge de 106,74kN, le délaminage légèrement observé dans l'interface autour de la fissure transverse

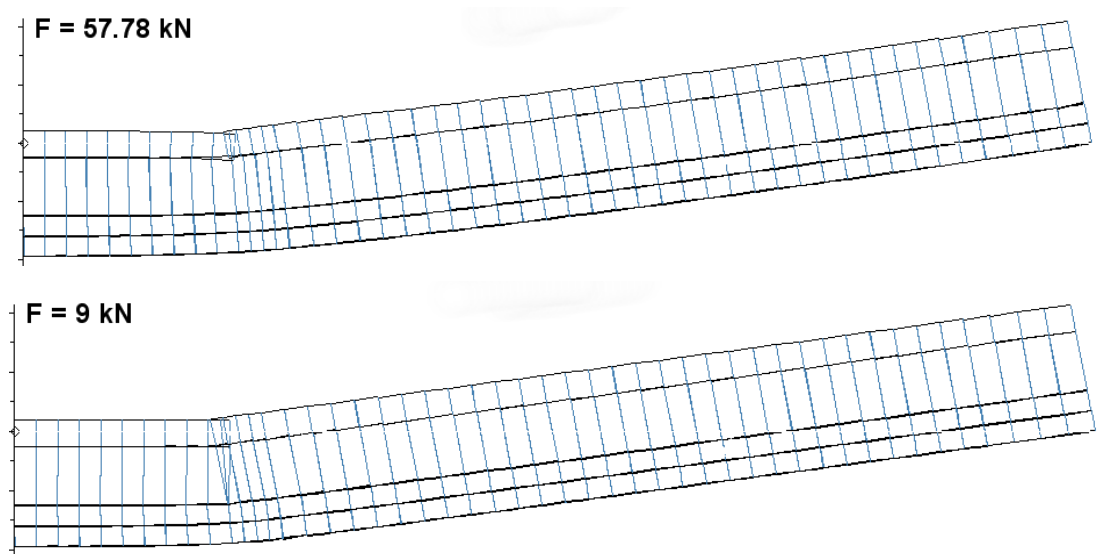


Figure 5.67. (a) et (b) Rupture en compression du béton engendre la rupture en compression du bois

La courbe Force-Flèche simulée est présentée dans la Figure 5.68. Une seule fissure transverse dans le bois est observée avant la ruine du béton. La courbe Force-Flèche est simulée sur la Figure 5.68. On constate que la théorie sous-estime l'expérience (Figure 5.56), probablement à cause de la non prise en compte de la plastification du béton.

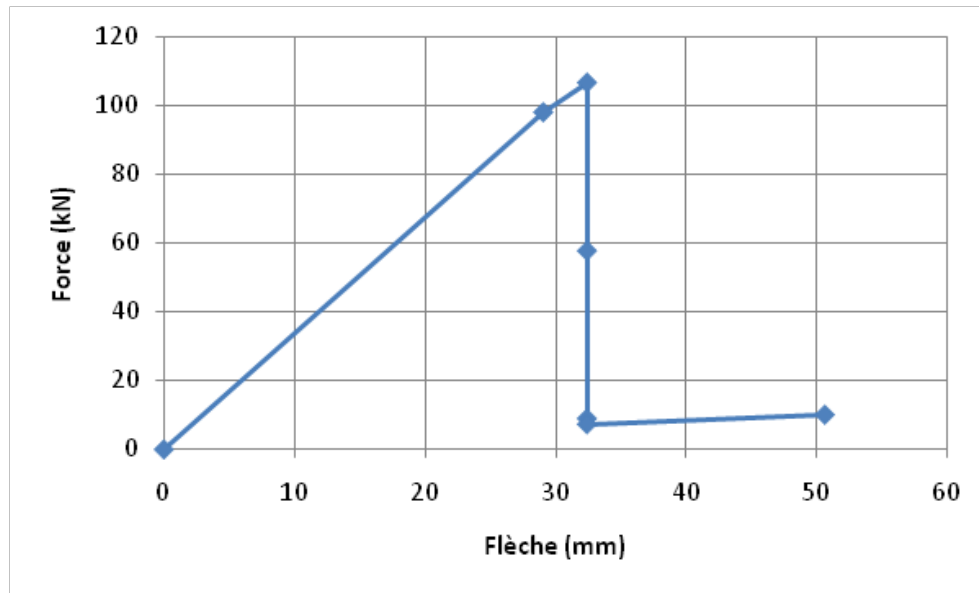


Figure 5.68. Courbe Force – Flèche de la poutre renforcée

Nous proposons maintenant une autre configuration de la poutre renforcée que nous avons simulée, dont la section est en T. La largeur de la couche BFUP est deux fois plus grande que celle du bois (180 mm). L'épaisseur des lamelles du bois est de 16,5 mm pour 90 mm de largeur. Le carbone a une épaisseur de 0,6 mm. Nous montrons qu'un schéma de multi fissuration peut se créer dans le bois qui permet de retarder la rupture finale en augmentant la résistance ultime de la poutre.

Un essai numérique de flexion 4 points a été réalisé par le pilotage en déplacement (Figure 5.69). A 150,7 kN, des premières ruptures ont été observées par des fissures transverses dans les lamelles bois du côté tendu, la chute de charge est légèrement observée. A 181,3kN, une série de fissures transverses et délaminage provoque une chute de charge jusqu'à 170,8kN. La poutre est encore résistante jusqu'à la rupture de la plaque béton à 180,9kN en provoquant une grande chute à 80,7kN.

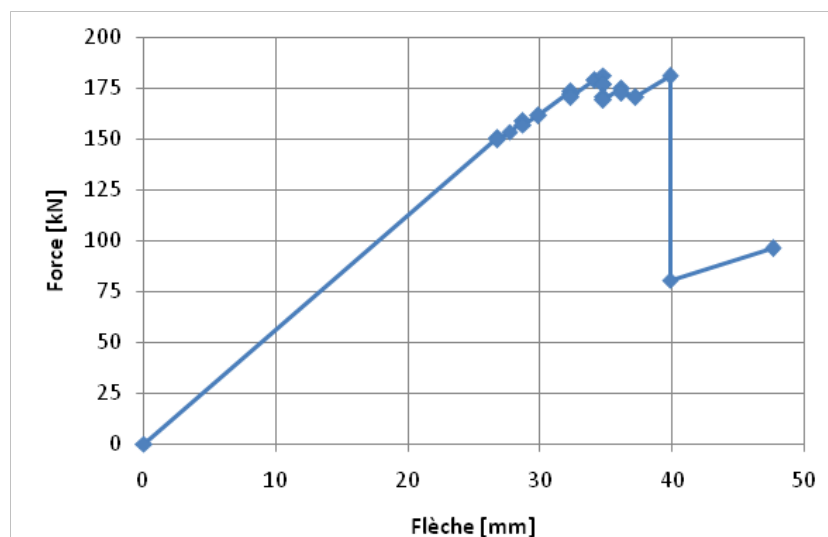


Figure 5.69. Courbe Force – Flèche de la poutre numérique

Les Figure 5.70 à Figure 5.72 ci-dessous décrivent la configuration de la poutre déformée. Les fissures transverses et la délamination dans les dernières lamelles du côté tendu ne sont pas très visibles, ceux qui n'influencent pas quasiment à l'état de déformation général de la poutre.

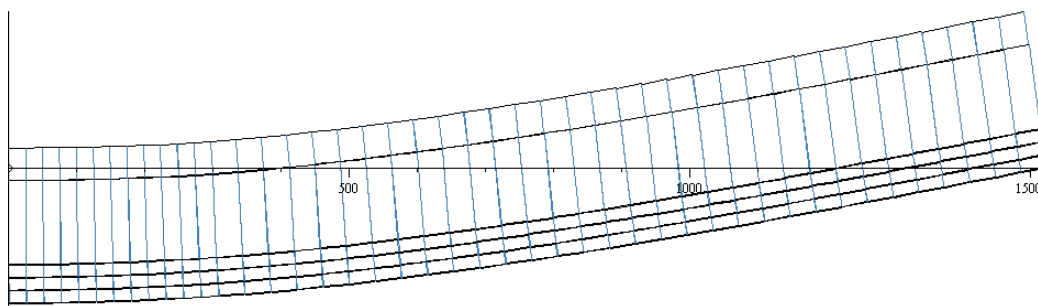


Figure 5.70. *Le comportement force – flèche est linéaire jusqu'à 150,7kN*

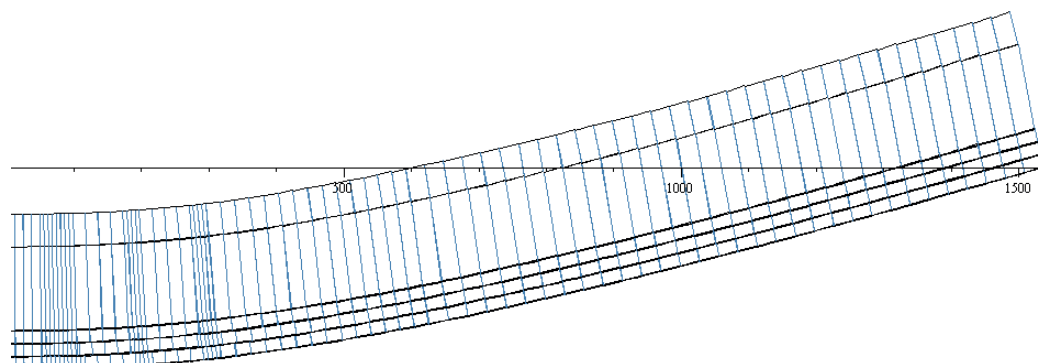


Figure 5.71. *Configuration de déformation à 181.3kN (avant rupture de la plaque BFUP)*

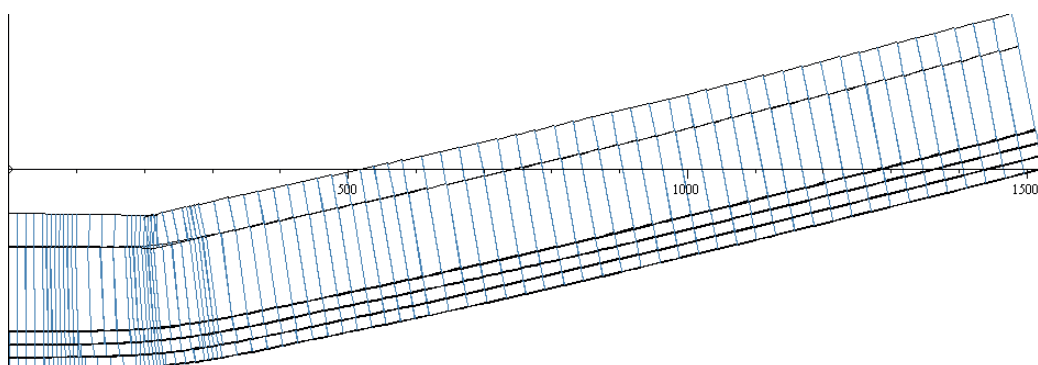


Figure 5.72. *Rupture de la plaque BFUP*

5.8.4. Conclusion sur le résultat de la simulation

Grâce à la simulation numérique présentée, nous avons justifié les résultats expérimentaux en montrant que le schéma de multi-fissuration peut être obtenu dans une poutre de bois lamellé collé renforcée. Pour les essais des poutres renforcées, nous avons prédimensionné une configuration en se basant sur la résistance en traction, la résistance en cisaillement du bois et la résistance en compression du béton. En effet, tous ces trois modes de rupture sont observés lors des essais de 5 éprouvettes renforcées. Ce résultat justifie notre prédiction et confirme que la performance des poutres renforcées peut être encore améliorée par l'augmentation de la largeur et/ou l'épaisseur du béton, de la quantité du renfort de cisaillement ...

Grâce à une configuration numérique, nous avons également montré que la résistance de la structure multi lamellée augmente avec la diminution de l'épaisseur des lamelles mais sa raideur structurale ne change pas quasiment. La multi fissuration créée fournit une pseudo-ductilité en retardant la rupture finale qui est normalement fragile dans les poutres mixte bois – béton. Cette

remarque peut être intéressante pour les éléments architecturaux en bois qui demandent parfois d’être fins et résistants.

5.9. Optimisation de la hauteur de renforcement d’une poutre hybride en bois

Dans cette partie nous proposons le cadre d’un dimensionnement qui permettrait d’optimiser la hauteur de bois à renforcer en flexion.

Dans les poutres en bois lamellé collé, notamment celle de grande hauteur, la hauteur de la partie renforcée où l’on insère le matériau composite peut être optimisée, ce qui permet non seulement d’économiser le composite mais aussi d’assurer une résistance importante, grâce au schéma de multi-fissuration créé dans la zone renforcée. Connaissant la distribution de contraintes normales dans une section, on peut estimer qu’un renforcement est efficace si la rupture s’effectue avec une grande probabilité dans la zone de bois renforcée. Ainsi, lorsque la charge augmente, jusqu’à atteindre en fibre inférieure la valeur maximale de rupture du bois renforcé, correspondant par exemple au 95^{ème} centile du bois renforcé, il faut vérifier que la partie non renforcée du bois a une très faible probabilité de rupture, donc que la sollicitation n’excède pas dans cette zone non renforcée la résistance caractéristique du bois non renforcé (fractile de 5%). Cette condition permet de proposer la hauteur h_r de bois à renforcer (voir Figure 5.73) :

$$h_r = k_z \cdot z \left(1 - \frac{R_0^{5\%}}{R_c^{95\%}} \right) \quad (5.7)$$

Où :

z : Position de l’axe neutre par rapport à la face inférieure

$R_0^{5\%}$: Le cinquième centile de la résistance du bois sans renfort

$R_c^{95\%}$: Le quatre-vingt quinzième centile de la résistance du bois renforcé

k_z : le coefficient de changement de la position de l’axe neutre en présence du renfort. ($0 < k_z < 1$)

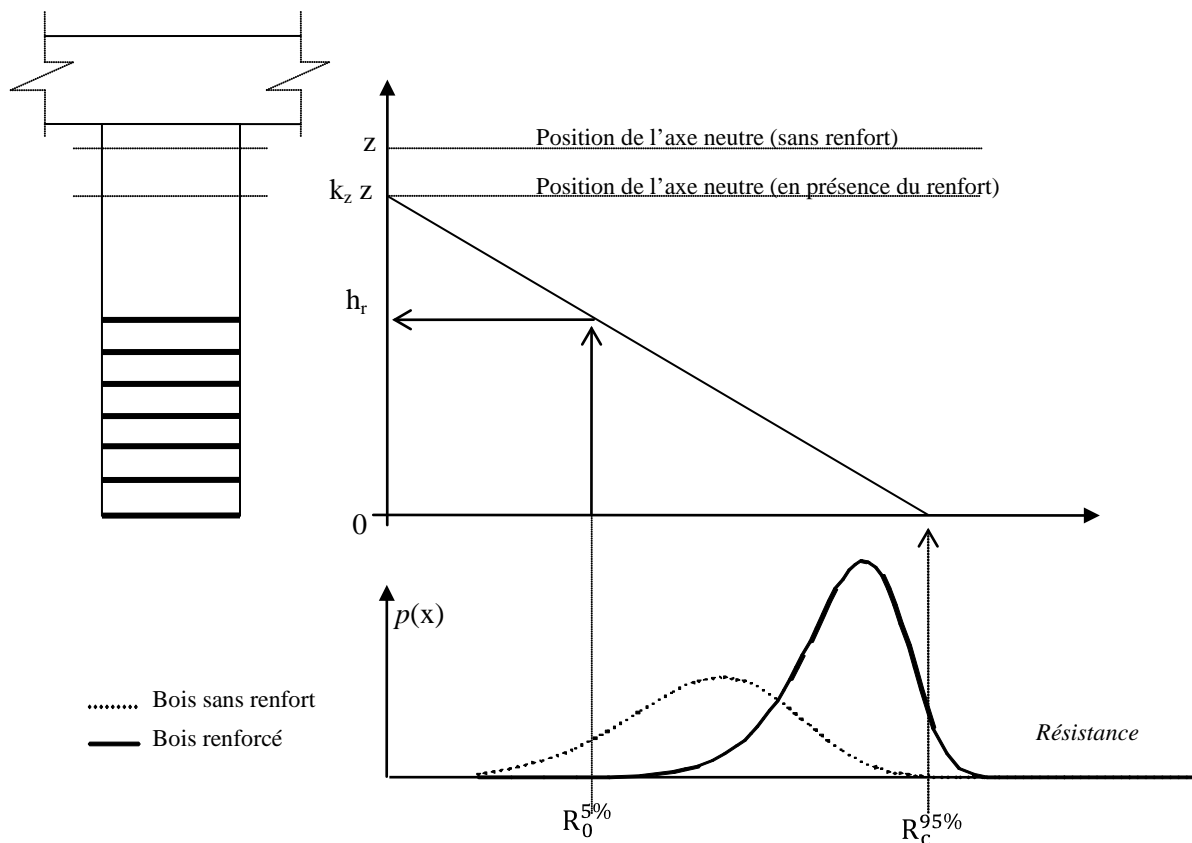


Figure 5.73. Schéma du calcul de la hauteur optimale à renforcer

Dans l'optique d'économie, on a vu qu'un renfort de faible épaisseur est suffisant pour accroître les performances du bois. Ainsi il est prévisible que la hauteur z ne change pas beaucoup en présence de renfort. De plus, en présence d'une dalle en béton en dessus, le déplacement de l'axe neutre sera très faible, k_z peut être alors pris égale à 1. La hauteur de bois à renforcer est enfin :

$$h_r = z \left(1 - \frac{R_0^{5\%}}{R_c^{95\%}} \right) \quad (5.1)$$

5.10. Conclusion

Une campagne d'essai sur la flexion des poutres hybrides bois-béton, avec et sans renfort, a été réalisée. Nous avons pu démontrer que le procédé de fabrication de ces poutres peut s'opérer dans un cadre industriel en utilisant la colle standard en polyuréthane dont dispose l'usine de lamellé collé.

Les poutres renforcées ont montré une résistance environ 2 fois plus importantes que celles non renforcées. L'apparition de fissures transverses stoppées par le carbone a été observée. Cependant des modes de rupture en cisaillement ou en compression du béton BFUP ont été observés, malgré les précautions prises pour renforcer les corps d'épreuve vis-à-vis de ces sollicitations (utilisation de BFUP et renforcement en cisaillement aux extrémités par des composites).

Nous montrons que l'apport du renforcement intervient sur 2 aspects. Le premier, prévu par la RdM vient de l'augmentation de raideur de la structure, laquelle diminue les contraintes dans le bois,

le second est dû à l'amélioration du comportement statistique du bois, ce qui se traduit par une loi différente. Cette contribution a eu pour nos essais une part équivalente à celle de l'augmentation de raideur (Tableau 5.7)

La possibilité de la création du schéma multi fissuration dans la zone du bois tendu a été justifiée expérimentalement car nous avons pu observer pour le corps d'épreuve 2.2 l'arrêt d'une fissure de traction d'une lamelle et la création d'une seconde pour une charge plus importante. Cependant nous montrons également qu'il n'était guère possible d'obtenir plus de 2 fissures de traction car le critère de rupture en cisaillement devenait prédominant pour les plus fortes charges.

Nous proposons enfin une règle pour définir la hauteur de renfort minimale d'une poutre en flexion. L'effet que nous avons montré est toutefois limité aux épaisseurs de lamelles que nous avons étudiées. Pour des lamelles plus épaisses, ce critère est certainement à revoir.

Enfin, par ces essais, nous montrons que le renforcement en traction du BLC n'a d'intérêt que si un renforcement en compression et en cisaillement a déjà été prévu. Le collage de BFUP en partie comprimée constitue une très bonne solution pour la compression, en termes mécanique et économique. Pour ce qui concerne le renforcement en cisaillement, des études d'optimisation sont certainement à réaliser.

Conclusion générale et perspectives

Ce travail porte sur la recherche de solutions innovantes pour l'amélioration des performances du bois en flexion, dans la continuité des travaux de Pham sur la connexion bois-béton. Les applications visées concernent les tabliers d'ouvrages d'art. Les outils retenus pour ce travail sont tant expérimentaux que théoriques.

Dans le chapitre 1, la littérature nous indique que l'amélioration des performances mécaniques des structures en bois en flexion peut s'effectuer par connexion d'un autre matériau. Cela peut être du béton dans la zone comprimée, ou des composites dans la partie tendue. Dans ce même chapitre, nous avons recherché des formes nouvelles intégrant l'association, au matériau bois, de béton ultra performant et de composites. Des calculs de structures en nid d'abeilles ou en sandwich de bois de bout ont montré les limites de telles conceptions, en termes de rigidité, pour l'application de ponts. Nous avons aussi conclu que les tabliers à poutres constituaient un potentiel de développement et feraient l'objet de la suite du travail.

Le chapitre 2 s'intéresse au renforcement des poutres par fibres de carbone. Pour avoir les premières évaluations sur la performance du renforcement du bois par des matériaux composites, nous avons réalisé une campagne d'essai sur 30 poutres en bois dont la moitié est renforcée par composite de fibres de carbone UD (CFRP). Les résultats ont été analysés par un schéma non linéaire basé sur le comportement bi-linéaire du bois en compression et 2 lois de Weibull ont été ajustées sur ces résultats. Nous montrons alors que l'usage de composites modifie le comportement statistique en réduisant la dispersion mais, sans en améliorer les résistances les plus élevées, du fait d'un déplacement du mécanisme de ruine par plastification du bois en compression (plutôt qu'en traction). L'hypothèse d'un effet d'échelle sur la résistance, résultant notamment des résultats observés sur le prototype à l'échelle 1 testé au LCPC Paris dans le cadre du projet européen NR2C, nous a amené à réfléchir à la solution de multi renforcement. La question est alors de rechercher la distribution optimale du composite disposé entre des lamelles de bois afin d'augmenter la ductilité structurelle et la capacité portante. Nous avons transposé cet objectif en la recherche des conditions pour obtenir une multi-fissuration du bois en traction.

Pour résoudre ce problème, nous avons d'abord appliqué, dans le chapitre 3, les « modèles multiparticulaires pour les matériaux multicouches », dits modèles M4, développés au sein de l'UR Navier, afin de déterminer un critère de délaminage en traction d'une éprouvette hybride (bois-carbone). Ce critère devait être fonction des propriétés et de la géométrie (proportion des 2 matériaux). Une solution 1D semi-analytique exacte a été proposée pour ce problème. Cette solution locale permet d'obtenir un critère de rupture d'interface basé sur la contrainte maximum.

Dans le chapitre 4, un critère pour les assemblages 3 couches bois – carbone a été expérimentalement identifié en utilisant le résultat théorique du chapitre 3 sur une série de tests sur des échantillons de dimensions différentes. D'un point de vue théorique, nous avons proposé un schéma de calcul rapide et simple. Cette méthode permet également aux utilisateurs de simuler numériquement des essais sur les structures multicouches 1D en présence de ruptures progressives avec la précision applicable à l'échelle micro ou macro. Sur le problème de bords libres, la solution proposée donne directement les valeurs aux bords sans calculer ce qui se passe à l'intérieur.

Le chapitre 5 est consacré à la démonstration de la performance en flexion de structures hybrides. 8 corps d'épreuve, constitués de poutres en BLC renforcées en compression par du béton, dont 5 d'entre elles renforcées par 3 couches de CFRP, les 3 autres étant des poutres de référence, ont été testées en flexion. La fabrication des poutres a été effectuée au sein de l'entreprise CMBP à Houdan, les plats en CFRP ayant été fournis par la société SIKA.

Le comportement élastique et la résistance maximale ont été observés. Nous avons pu montrer la grande performance du multi-renforcement puisqu'une augmentation moyenne de la résistance de

110% a été constatée par rapport aux corps d'épreuve de référence. De plus, nous montrons que la prise en compte du renforcement peut s'effectuer par la modification de la loi de Weibull décrivant le comportement du bois, laquelle se traduit par l'adoption d'une valeur de résistance caractéristique du bois en traction plus élevée. Dans un des corps d'épreuve, une fissure de traction dans le bois a été stoppée et a permis à une autre fissure de se développer à un autre endroit. Nous montrons ainsi que le schéma de multi-fissuration est possible, mais que la configuration des corps d'épreuve est peu adaptée à ce schéma de rupture. En effet, les performances ont été très supérieures aux estimations, et plusieurs poutres ont périés par excès de compression dans le béton (contrainte supérieure à 150 MPa) ou par cisaillement (malgré les renforcements prévus à cet effet). Enfin, un schéma pour l'optimisation de la hauteur renforcée a été proposé à la fin du chapitre.

Des travaux supplémentaires sont à proposer dans le futur, d'un point de vue théorique et expérimental. Le prix des fibres de carbone est encore élevé, et son bilan CO₂ est défavorable. Si le recours aux fibres de carbone est justifié dans de nombreux cas comme celui de la réparation et le renforcement de structures existantes, il apparaît intéressant de trouver un autre composite à notre problème, lequel porte sur des structures nouvelles. L'analyse théorique montre que ce qui influence vraiment le résultat est la raideur structurale du renfort, c'est-à-dire le produit « épaisseur × module ». Les composites à base des fibres de verre ou de lin sont alors intéressants, sans doute d'impact environnemental plus favorable, et moins coûteux.

Le renforcement en flexion/traction n'améliore pas la résistance en cisaillement du bois, laquelle est assez faible. Le renforcement en cisaillement est donc indispensable et doit être étudié.

En présence de renfort, les poutres en bois voient leur résistance augmenter, mais la raideur structurale n'est pas proportionnelle à cette augmentation, ce qui limite l'application de tels renforcements aux structures particulières dont le critère de dimensionnement est la résistance.

Dans les calculs théoriques, nous avons supposé que la résistance en traction du bois de toutes les lamelles dans une poutre est une variable aléatoire ayant une même fonction de distribution. En fait, cette fonction de la lamelle extrême peut être différente de celles à l'intérieur. Des études expérimentales seront peut être nécessaires pour justifier ce commentaire.

D'une manière générale, la durabilité des colles est étudiée dans différents laboratoires. Il reste cependant nécessaire de vérifier la durabilité du collage sur le matériau bois. Cette durabilité est sensible au changement hygroscopique et de température, notamment à cause de la variation dimensionnelle transversale du bois, ce qui engendrera l'effet de bord décrit au chapitre 4. Des projets sur ce thème ont démarrés dans le cadre de la thèse de L. Loulou, impliquant le LCPC, l'UR Navier et le LRPC d'Autun.

Bibliographie

- [1] Aitcin. (1998). Méthode et système d'ancrage d'un revêtement de béton à une surface existante. Brevet d'invention CA 02207549 - Office de la propriété intellectuelle du Canada.
- [2] Amy, K. and Svecova, D. (2004). Strengthening of dapped timber beams using glass fiber reinforced polymer bars. *Can. J. Civ. Engineering*, 31 , 943-955.
- [3] Anderson, T., Madenci, E., Burton, S.W., Fish, J.C.,. (1998). Analytical solutions of Finite-Geometry Composite Panels under Transient Surface Loadings. *International Journal of Solids and Structures* , 1219-1239.
- [4] André, A. (2006). *Fibres for Strengthening of Timber Structures*. Thèse Lunéa University.
- [5] Bathon T., Bathon L. (2005). Wood-Concrete-Composite systems. Brevet d'invention US 2005/0086906. United States Patent Application Publication .
- [6] Ben Mekki O., Toutlemonde F., Caron J-F. (2007). Testing innovative aspects of a 10m span - Composite UHPFRC carbone fibers timber bridge. *New Road Construction Concepts - Work Package 3 - Innovation in civil Engineering* .
- [7] Benzeggah, M. (1996). Measurement of mixed-mode delamination fracture toughness of unidirectional glass/epoxy composites with mixed mode bending apparatus. *Composites Science and Technology*, 56 , 439-449.
- [8] Blonski, A. (2009). Étude de la rigidité de systèmes de connexion pour un pont type bois - béton. Champs sur Marne: PFE - Ecole des Ponts ParisTech / Jean Moulin International.
- [9] Borri, A. (2005). A method for flexural reinforcement of old wood beams with CFRP materials. *Composites: Part B* 36 , 143-153.
- [10] Buell, T.W. and Saadatlanesh. (2005). Strengthening timber bridge beams using carbon fibers. *Journal of Structural Engineering* 131 , 173-187.
- [11] Bui, H. (1978). *Mécanique de la rupture fragile*. Ed. Masson, Paris .
- [12] Calgaro, J.-A. (1996). *Introduction aux Eurocodes*.
- [13] Canadian Wood Council. (2007). Récupéré sur <http://www.cwc.ca/products/glulam/?language=EN>
- [14] Caron J.F., Ehrlacher, A. (1997). Modelling the kinetics of transverse cracking in composite laminates. *Comp. Sci and Tech*. Vol 57 , 1261-1270.
- [15] Caron, J.-F. (1993). *Modélisation de la cinétique de fissuration transverse en fatigue dans les stratifiés*. Thèse : Ecole Nationale des Ponts et Chaussées .
- [16] Caron, J.F., Carreira, R.P. (2003). Multi-particle modelling for the prediction of delamination in multi-layered materials. *Composites Science and Technology*, Vol 63, Issue 5 , 633-640.
- [17] Caron, J.F., Diaz Diaz, A., Carreira, R.P., Chabot, A., Ehrlacher, A. (2006). Multi-particle modelling for the prediction of delamination in multi-layered materials. *Composites Science and Technology*, Vol 66, Issue 6 , 755-765.
- [18] Carreira, R.P., Caron, J.F., Diaz Diaz, A. (2002). Model of multilayered materials for interface stresses estimation and validation by finite element calculations. *Mechanics of Materials*, Vol 34, Issue 4 , 217-230.
- [19] Carrera, E. (1995). A class of two-dimensional theories for anisotropic multilayered plates analysis. *Accademia delle Scienze di Torino, Memorie Scienze Fisiche* , 1-39.

-
- [20] Carrera, E. (1998). Evaluation of Layer-Wise Mixed Theories for Laminated Plates Analysis. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal , 830-839.
- [21] Carrera, E. (1998). Mixed Layer-Wise Models for Multilayered Plates Analysis. Composite Structures , 57-70.
- [22] Carrera, E. (1999). Multilayered Shell Theories that Account for a Layer-Wise Mixed Description. Part II. Numerical Evaluations. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 37, No.9 , 1117-1124.
- [23] Carrera, E. (2000). Single-Layer vs Multi-Layers Plate Modelings on the Basis of Reissner's Mixed Theorem. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal , 342-343.
- [24] Carrera, E. (1999). Transverse Normal Stress Effects in Multilayered Plates. Journal of Applied Mechanics , 1004-1012.
- [25] Chabot, A. (1997). Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches (M4). Thèse : Ecole Nationale des Ponts et Chaussées .
- [26] Chyanbin. (1995). Delamination fracture criteria for composite laminates. Journal of Composite Materials, 29 , 1962-1987.
- [27] Cosserat, E., Cosserat, F. (1999). Theories des corps déformables. Paris: In Traite de Physique, 2nd Ed., Chwolson.
- [28] CTBA. (2003). Carboglulam®, poutre de lamellé-collé renforcée avec du carbone . Site : <http://www.le-bois.com> .
- [29] Dagher, H.J., Kimball, T.E., Shaler, S.M. and Beckry, A.-M. (1996). Effect of FRP reinforcement on low grade western hemlock glulams. National Conference on wood transportation structures, Madison, USA .
- [30] Delfino, A. (2006). Conception d'un pont mixte en matériaux composites de faible portée. Champs sur Marne: Ecole des Ponts ParisTech.
- [31] Diaz-Diaz A., Caron J-F. (2000). Criterion of delamination initiation in composite laminates. Proceedings of the 8th international conference on fiber reinforced composites FRC 2000, Newcastle, England .
- [32] Diaz-Diaz, A. (2001). Delaminages des matériaux multicouches : Phénomènes, modèles et critères. Thèse : Ecole Nationale des Ponts et Chaussées .
- [33] Ehrlacher A., Caron J.F., Chabot, A., Naciri T. (Nov. 1994). Analyse des efforts d'interface à l'aide d'une Modélisation Multiphasique des Matériaux Multicouches (M4). Saint-Etienne: Comptes-rendus des 9èmes Journées Nationales sur les Composites, .
- [34] EN408, N. (2003). Structures en bois massif et bois lamellé collé - Détermination de certaines propriétés physiques et mécaniques pour le calcul des structures.
- [35] Eurocode5. (2003). prEN1995-1-1: Design of timber structures. Part 1-1: General - Common rules and rules for buildings.
- [36] Faye, C. (1997). Comportement mécanique du bois lamellé collé. Bordeaux: Thèse Université de Bordeaux.
- [37] Fiorelli, J. and Dias, A. Alves. (2003). Analysis of the strength and stiffness of timber beams reinforced with carbon fiber and glass fiber. Material Research 6 , 193-202.
- [38] Fonlupt, S. (2009). Expérimentation sur la connexion bois / béton et sur le renforcement en flexion de poutres en bois lamellé collé par composites de carbone. Champs sur Marne: Rapport de stage - Ecole des Ponts ParisTech.
-

- [39] Gentile, C., Svecova, D. and Rizkalla. (2002). Timber beams strengthened with GFRP bars: development and applications. *Journal of Composites for Construction* 6(1) , 11-20.
- [40] Guedra-Degeorges. (1993). Principaux essais de délaminage. Exploration. Dans une nouvelle approche des composites par la mécanique de l'endommagement. Notes de cours.
- [41] Heimeshoff. (1987). Zur Berechnung von Biegeträgen aus nachgiebig miteinander verbundenen Querschnittsteilen im Ingenieurholzbau. *Holz als Roh- und Werkstoff*, vol 45 , 237-241.
- [42] Hernandez, R., Davalos, J.F., Sonti, S.S, Kim, Y., Moody, R.C. (1997). Strength and stiffness of reinforced yellow-poplar glued-laminated beams. US Department of Agriculture, Forest Service, Forest Product Laboratory .
- [43] Hochard, C., Payan, J. (2002). Damage modelling of laminated carbon/epoxy composites under static and fatigue loadings. *International Journal of Fatigue*, Vol.24, Issue 2-4 , 299-306.
- [44] Irwin. (1958). Fracture. Dans *Handbuch der Physik*, vol 6 , 551-590.
- [45] Irwin, G. (1958). Fracture. Dans *Handbuch der Physik*, Vol 6 Springer Verlag , 551-590.
- [46] John, K.C. and Lacroix, S. (2000). Composite reinforcement of timber in bending. *CAN. J. Civ. Eng.*, 27 , 899-906.
- [47] Laalai, I. (1995). A stochastic non local damage model. *International Journal of Fracture*, Vol 76, 121-140.
- [48] Larsen, H. (2003). Timber Engineering - Chapter 12: Design of structure based on Glulam, LVL and other solid timber products, ISBN 0-470-84469-8 .
- [49] Larsen, K. E. (2000). Conservation of Historic Timber Structures - An ecological approach. Reed Educational and Professional Publishing Ltd .
- [50] Le Roy R., Pham H.S., Foret G. (s.d.). New wood composite bridges. *European Journal of environmental and civil engineering*, sous presse .
- [51] Leguillon. (1998). Amorçage du délaminage sur les bords libres des stratifiés croisés - Etudes de deux critères. Composites rendus des onzième journées nationales sur les composites, Arcachon, .
- [52] Leguillon. (1999). Method based on singularity theory to predict edge delamination of laminates. *International Journal of fracture*, vol 100 , 105-120.
- [53] Lemaitre J., Chaboche J.L. (1985). *Mécanique des Matériaux Solides*. Ed. Dunod-Bordas, Paris .
- [54] Linden, M. (1999). Timber-Concrete composite floor systems. Thèse : Delft University .
- [55] Lopez-Anido, R. and Xu, H. . (2002). Structural characterization of hybrid fiber-reinforced polymer-glulam panels for bridge decks. *Journal of Composites for Construction* 6(3) , 194-203.
- [56] Madsen B., Buchanan A.,. (1986). Size effects in timber explained by a modified weakest link theory. *Canadian Journal of Civil Engineering*, Vol 13 , 218-232.
- [57] Marion. (2000). Etude expérimentale et théorique de l'amorçage du délaminage au bord de matériaux composites stratifiés. Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux .
- [58] Mindlin. (1951). Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* , 1031-1036.
- [59] Murakami, H., Reissner, E., Yamakawa, J. (1996). Anisotropic beam theories with shear deformation. *Journal of Applied Mechanics* , 660-668.
- [60] Natterer J., Sandoz J.L. et Rey M. (2000). *Construction en bois*. Presses Polytechnique et universitaire romandes .
- [61] Navi P., Heger F. (2005). *Comportement thermo-hydrromécanique du bois*. Presses polytechniques et universitaires romandes .
- [62] Nguyen, V.T, Caron, J.F. (2009). Finite element analysis of free-edge stresses in composite laminates under mechanical and thermal loading. *Composites Science and Technology*, 69 , 40-49.

-
- [63] Noray, D. (2005). Dimensionnement d'une dalle de pont en matériau composite. Champs sur Marne: Ecole des Ponts ParisTech.
- [64] Ogawa, H. (2000). Architectural application of carbon fibers, development of new carbon fiber reinforced glulam. Carbon 38 , 211-226.
- [65] Pagano, N. (1969). Exact solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending. Journal of Composite Materials , 398-411.
- [66] Pagano, N. (1970). Exact solutions for rectangular bi-direction composites and sandwich plates. Journal of Composite Materials , 20-34.
- [67] Pagano, N. (1978). Stress fields in composite laminates. International Journal of Solids and Structures, 14 , 385-400.
- [68] Pagano, N.J., Hatfield, S.J. (1972). Elastic behavior of Multilayered Bidirectional Composites. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 10 , 931-933.
- [69] Pham, H. (2007). Optimisation et comportement en fatigue de la connexion bois - BFUP pour de nouveaux ponts mixte. Thèse Ecole des Ponts Paris Tech .
- [70] Polit, O., Touratier, M. (2000). Higher order triangular sandwich plate finite elements for linear and non-linear analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , 305-324.
- [71] Reddy, J. (1997). Mechanics of Laminated Composite Plates, Theory and Analysis. CRC Press.
- [72] Reissner, E. (1950). On the variational theorem in elasticity. Journal of Mathematics and Physics , 20.
- [73] Reissner, E. (1945). The effects of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. Journal of Applied Mechanics , 69-76.
- [74] Reissner, E., Stavsky, Y. (1961). Bending and stretching of certain type of heterogeneous elastic plates. Journal of Applied Mechanics , 402-408.
- [75] Resplendino, J. (2004). First recommandation for Uktra High Performance Concretes and Exemples of Application. International Symposium on UHPC .
- [76] Resplendino, J. (2005). Innovative design of ultra high performance fiber reinforced concrete ribbed slab : experimental validation and preliminary detail analyses. International Symposium on HSC/HPC .
- [77] Romani, M. a. (2001). Design model for FRP reinforced glulam beams. International council for research and innovation in building and construction, . Venice, Italy: CIB-W18.
- [78] Rossi, P. (1997). High Performance multimodal fiber reinforced cement composite. ACI materials journal, vol 94 , 478-483.
- [79] Salençon, J. (1983). Calcul à la rupture et analyse limite. Presse de l'école nationale des Ponts et Chaussées, Cours de l'ENPC .
- [80] Schaumann E., Keller T. (2007). Hybride FRP - concrete bridge deck. NR2C New Road Construction Concepts - Works Package 3 - Innovation in civil engineering .
- [81] Schnabl S., Saje M., Turk G. et Planinc I. (2007). Analytical solution of two-layer beam taking into account interlayer slip and shear deformation. Journal of Structural engineering, Vol 113 , 886-894.
- [82] Schnable S., Saje M., Turk G. et Planinc I. (2007). Analytical solution of two layer beam taling into account interlayer slip and shear deformation. Journal of structural engineering, Vol 113 , 886-894.
- [83] SETRA. (2006). Guide technique - Les ponts en bois - Comment assurer leur durabilité.
- [84] Soni, K. e. (1984). Experimental and analytical studies on the onset of delamination in laminated composites. Journal of composite materials, vol 18 , 70-80.
- [85] Soni, K. e. (1986). Failure of composite laminates due to combined interlaminar normal and shear stresses. Composites 86 : Recent Advances in Japan and the United States , 341-350.
-

- [86] Srinivas, S. (1973). A refined analysis of composite laminates. *Journal of Sound and Vibration* , 495-507.
- [87] Steurer, A. (2006). Developments in timber engineering.
- [88] Suntherland L.S., Shenoi R.A., Lewis S.M. (1999). Size and scale effects in composites. I: Literature Review. *Composites Science and Technology*, Vol. 59 , 209-220.
- [89] Svecova, D. and Eden, R.J. (2004). Flexural and shear strengthening of timber beams using glass fibre reinforced polymer bars : an experimental investigation. *Can. J. Civ. Eng.* 31 , 45-55.
- [90] Toledano, A., Murakami, H. (1987). A high-order laminated plate theory with improved in-plane responses. *International Journal of Solids and Structures* , 111-131.
- [91] Toratti T., Morlier P. (1995). Fluage long terme du bois fléchi en grandeur structurale. *Matériaux and Structures*, vol 28 , 284-292.
- [92] Triantafillou, T. (1998). Composites : a new possibility for the shear strengthening of concrete, masonry and wood. *Composites Science and Technology* , 1285-1295.
- [93] Trouy-Triboulot M. C., Triboulot P. (s.d.). *Matériau bois - Structure et Caractéristiques. Guide Technique de l'ingénieur - Traité Construction* .
- [94] Tsai S. W., Wu E.M. . (1971). A general theory of strengthfor anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*, Vol 5 , 58-80.
- [95] Varna J., Foffe R., Berglund L.A. (1996). Interfacial toughness evaluation from the single-fiber fragmentation test. *Composite Sci Tech*, vol 56 , 1105-1109.
- [96] Weaver, C. (1999). Behavior of FRP glulam-concrete composite bridge girders. Thèse : B.S. Unviersité of Maine .
- Weibull. (1951). A statistical distribution of wide applicability. *Journal of applied mechanics:* , 293-297.